

Electromagnetic Field Produced by the Circle Current Pulse in Metals

Ming Gao¹, Chao Gao¹, Mengru Lu²

¹ College of Physics Science and Technology, Shenyang normal university, Province 110034, China

² College of Vocational and Technology, Shenyang normal university, Province 110034, China

Email: synugm@yahoo.com.cn

Abstract: We discussed the interaction of metal materials and pulse electromagnetic field produced by capacitor discharging through the circle coil, the induced electromagnetic field in the metal materials by the circle electric current was calculated. And the analytical expression of electromagnetic field was given.

Keywords: circle coil; pulse current; pulse electromagnetic field

环形线圈中脉冲电流在金属中产生的电磁场

高明¹, 高超¹, 吕孟儒²

¹ 沈阳师范大学 物理科学与技术学院, 辽宁省沈阳市 110034

² 沈阳师范大学 职业技术学院, 辽宁省沈阳市 110034

Email: synugm@yahoo.com.cn

摘要: 讨论了由电容通过环形线圈放电产生的脉冲电磁场与金属材料的相互作用, 计算了环形线圈中的电流在金属材料中产生的感应电磁场, 给出了电磁场的解析表达式。

关键词: 环形线圈; 脉冲电流; 脉冲电磁场

1 引言

当环形线圈中有电流通过时, 会产生脉冲电磁场。此脉冲电磁场与线圈附近的金属相互作用, 在金属材料中可产生电磁应力、涡流、电致迁移等较为复杂的效应。利用这些效应在材料制备、加工及使用过程中对材料进行处理, 往往可以改善材料的性能, 获得良好的效果。此外, 用脉冲磁场以感应的方式对金属材料进行处理, 可实现对金属材料的非接触脉冲处理。这在某些特殊环境下有更重要的意义。为深入研究脉冲电磁场与金属材料的相互作用, 首先应了解材料中电磁场的分布情况。本文对环形线圈中脉冲电流在金属材料中产生的电磁场进行计算。

2 环形线圈产生的电磁场方程

引入矢势 $\vec{A}$ 与标势中 ϕ 来描述电磁场, $\vec{E}$ 为电场强度, $\vec{B}$ 为磁感应强度则有:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (2)$$

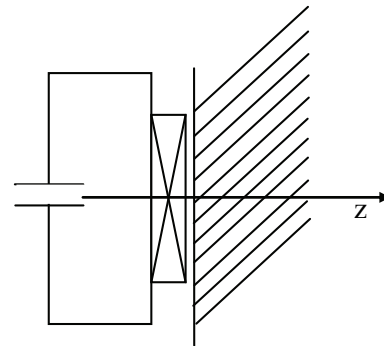


Figure 1. Sketch of metal treated with current coil

图 1. 线圈处理金属材料示意

在电容器放电情况下, 线圈中电流变化的频率在 $10^3 \sim 10^4 \text{Hz}$ 的数量级上, 所以其感应的电磁场可按稳场处理。在均匀线性介质中, 并且认为无自由电荷积累的情况下, 可取规范条件为 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, $\phi = 0$ ^[1] 由于趋肤效应, 脉冲电磁场只能对金属材料的表面层由较明显的影响, 而在金属的内部深处电磁场较弱,

基金项目: 辽宁省教育厅创新团队资助项目 (2009T093)

所以可将金属材料视为半无限大金属。取柱坐标 z 轴正向指向金属内部, 金属表面位于 $z=0$, 线圈也处于金属表面, 且其中心轴线与 z 轴重合。由 Maxwell 方程及材料的本构方程可得矢势 $\vec{A}$ 满足的方程为:

$$\nabla^2 \vec{A}_2 = \mu_2 \sigma \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} \quad (z > 0, \text{金属介质内}) \quad (3)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_2 = 0 \quad (z < 0, \text{金属界之外}) \quad (4)$$

$$\vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1 \right)_{z=0} = \vec{i}(t) \delta(\rho - a) \quad (5)$$

$$\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A} - \nabla \times \vec{A}) = 0 \quad (6)$$

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 = 0 \quad ; t = 0 \quad (7)$$

其中 μ_2 、 σ 分别为金属材料的磁导率和电导率, ρ 为柱坐标矢径, a 为线圈半径, $\vec{i}(t) = i(t)\vec{e}_\phi$ 为线圈中电流强度, $\delta(\rho - a)$ 为 δ 函数。

且电场 $\vec{E}$ 与磁感 $\vec{B}$ 由

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (8)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (9)$$

来确定^[1]。其中 μ 、 σ 分别为金属材料的磁导率和电导率。由于趋肤效应, 脉冲电磁场只能对金属材料的表面层有较明显的影响, 而在金属的内部深处电磁场较弱, 所以可将金属材料视为半无限大金属。取柱坐标 z 轴正向指向金属内部, 金属表面位于 $z=0$, 线圈也处于金属表面, 且其中心轴线与 z 轴重合 (图 1)。线圈中电流 $I(t)$ 由电容器放电产生。即 $I(t)$ 为 R-L-C 电路放电电流, 可表示为:

$$I(t) = \frac{V_0}{L\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t \quad [2] \quad (10)$$

其中

$$\beta = \frac{R}{2L},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

R 为电路中电阻, L 为电感, C 为电容, V_0 为电容器充电电压。

由于线圈产生的磁场与线圈中的电流成正比, 所

以在金属表面磁场随时间变化的规律与电流随时间变化的规律相同。对于方程(3), 其时间与空间的分离变量解随时间变化为指数衰减规律, 所以分离变量解不能满足与电流变化规律相同的边界条件。对于此问题, 应寻找方程 (3) 的其它形式的解以满足磁场在金属表面变化的边界条件。

3 半无限大金属中电磁场求解

对上述方程做 Laplace 变换得:

$$\nabla^2 L[\vec{A}_2] = \sigma \mu_2 p L[\vec{A}_2] \quad (3)^*$$

$$\nabla L[\vec{A}] = 0 \quad (4)^*$$

$$\vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times L[\vec{A}_2] - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times L[\vec{A}_1] \right)_{z=0} = L[\vec{i}(t)] \delta(\rho - a) \quad (5)^*$$

$$\vec{n} \cdot (\nabla \times L[\vec{A}_2] - \nabla \times L[\vec{A}_1])_{z=0} = 0 \quad (6)^*$$

电磁场是由环形线圈中电流产生的, 电流具有轴对称性, 所以矢势 $\vec{A}$ 也具有轴对称性。所以 $\vec{A} = A\vec{e}_\phi$, 进而有 $L[\vec{A}] = L[A]\vec{e}_\phi$, 即 $\vec{A}$ 与 $L[\vec{A}]$ 只有 $\vec{e}_\phi$ 方向分量。在柱坐标系中方程(6)^{*}(7)^{*}为:

$$\frac{\partial^2 L[A_2]}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial L[A_2]}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} L[A_2] + \frac{\partial^2 L[A_2]}{\partial z^2} = \sigma \mu_2 p L[A_2] \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 L[A_1]}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial L[A_1]}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} L[A_1] + \frac{\partial^2 L[A_1]}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

注意到这两个方程的齐次方程都是一阶 Bessel 方程, 将 $L[A_1]$ 、 $L[A_2]$ 按一阶 Bessel 函数展开得:

$$L[A_2] = \int_0^\infty Z_2(z, k) J_1(\rho k) k dk \quad (13)$$

$$L[A_1] = \int_0^\infty Z_1(z, k) J_1(\rho k) k dk \quad (14)$$

将展开式代入方程(11)、(12)得:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2} - k^2 Z_2 \right) J_1(\rho k) k dk = \sigma \mu_2 p \int_0^\infty Z_2 J_1(\rho k) k dk$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} - k^2 Z_1 \right) J_1(\rho k) k dk = 0$$

若上述方程组成立, 则应有:

$$\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2} - k^2 Z_2 = \sigma \mu_2 p Z_2$$

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} - k^2 Z_1 = 0$$

这两个方程的解可表示为:

$$Z_2 = C_{21} e^{-\sqrt{k^2 + \sigma_{h2}^2} z} + C_{11} e^{\sqrt{k^2 + \sigma_{h2}^2} z} \quad ; z > 0 \quad (15)$$

$$Z_1 = C_{11} e^{-kz} + C_{12} e^{kz} \quad ; z < 0 \quad (16)$$

由自然边界条件: $z \rightarrow \infty$ 时, 有 $Z_2, Z_1 \rightarrow 0$, 得 $C_{22} = C_{11} = 0$; 由边界条件(8)*和(9)*得

$$C_{21} = C_{12} = \frac{aL[i(t)]J_1(ka)}{\frac{1}{\mu_2} \sqrt{k^2 + \mu_2 \sigma p} + \frac{k}{\mu_1}}$$

将这些系数代入 Z_2 的表达式(15), 然后代回到(13)式并求 Laplace 逆变换得:

$$A_2 = \int_0^t ai(t-\tau) \left[\frac{\mu_2 \sqrt{\sigma_{h2}}}{2\tau \sqrt{\pi}} e^{\frac{\sigma_{h2}}{4\tau} (z^2 + a^2 + \rho^2)} I_1 \left(\frac{\sigma_{h2}}{2\tau} a \rho \right) - \frac{\mu_2}{\sigma_{h1}} e^{\frac{\sigma_{h2}}{4\tau} z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g_n(z, \tau) \frac{a \rho^{\frac{n+5}{2}}}{8\pi} \left(\frac{\sigma_{h2}}{\tau} \right)^{\frac{n+5}{2}} \frac{\pi}{2} \sin^2 \varphi e^{\frac{\sigma_{h2}}{4\tau} (a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \varphi)} F \left(\frac{n+1}{2}, 2, \frac{\sigma_{h2}}{4\tau} (a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \varphi) \right) d\varphi \right] d\tau \quad (17)$$

其中用到了 Bessel 函数的积分公式^[3,4]:

$$\int_0^{\infty} x e^{-p^2 x^2} J_\nu(ax) J_\nu(bx) dx = \frac{1}{2p^2} e^{-\frac{a^2+b^2}{4p^2}} I_\nu \left(\frac{ab}{2p^2} \right)$$

$$J_n(ax) J_n(bx) = \frac{x^n a^n b^n}{2^n \sqrt{n!} \left(n + \frac{1}{2} \right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{J_n \left(x \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi} \right)}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)^{\frac{n}{2}}} \sin^{2n} \varphi d\varphi$$

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2 x^2} J_\nu(ax) x^{\nu} dx = \frac{\Gamma \left(\frac{\nu+t+1}{2} \right) \left(\frac{a}{2p} \right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} F \left(\frac{\nu+t+1}{2}, \nu+1, -\frac{a^2}{4p^2} \right)$$

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+1} \text{ 为一阶变形 Bessel 函数;}$$

$$F(\alpha, \gamma, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!(\gamma)_k} x^k \text{ 为合流超几何函数;}$$

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1);$$

$$(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+k-1);$$

$$g_n(z, \tau) = g^{[n]}(z, \tau, \xi) \Big|_{\xi=0}$$

为函数

$$g(z, \tau, \xi) = e^{\left(\frac{\sqrt{\sigma_{h2}}}{\sigma_{h1}} \sqrt{\tau} \xi + \frac{\sqrt{\sigma_{h2}}}{2\sqrt{\tau}} z \right)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\sigma_{h2}}}{\sigma_{h1}} \sqrt{\tau} \xi + \frac{\sqrt{\sigma_{h2}}}{2\sqrt{\tau}} z \right)$$

在 $\xi=0$ 处对 ξ 的偏导数。式(17)已经包含了金属材料内部电磁场的所有信息, 可以由其根据(8)(9)定出金属材料中的电场(电流)和磁场分布为:

$$\vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} = -\int_0^t ai'(t-\tau) \int_0^{\infty} h(\tau, z) J_1(ak) J_1(\rho k) k dk d\tau \vec{e}_\rho \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_2 &= \nabla \times \vec{A}_2 \\ &= -\int_0^t ai(t-\tau) \int_0^{\infty} \frac{\partial h(\tau, z)}{\partial z} J_1(ak) J_1(\rho k) k dk d\tau \vec{e}_\rho + \\ &\quad \int_0^t ai(t-\tau) \int_0^{\infty} h(\tau, z) J_1(ak) J_0(\rho k) k^2 dk d\tau \vec{e}_z \end{aligned} \quad (19)$$

其中,

$$h(\tau, z) = \frac{\mu_2}{\sigma} e^{\frac{\mu_2 \sigma^2}{4\tau} z^2 - \frac{\tau}{\mu_2 \sigma} k^2} \left[\frac{\sqrt{\mu_2 \sigma}}{\mu_2 \sqrt{\pi \sigma}} \frac{k}{4} e^{\left(\frac{k \sqrt{\mu_2 \sigma}}{\mu_2 \sigma} \sqrt{\tau} + \frac{\sqrt{\mu_2 \sigma}}{2\sqrt{\tau}} z \right)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\mu_2 \sigma}}{\mu_2 \sigma} \sqrt{\tau} + \frac{\sqrt{\mu_2 \sigma}}{2\sqrt{\tau}} z \right) \right]$$

表达式形式比较复杂, 直接应用比较困难, 所以一般需要通过数值计算来了解电磁场的变化规律。如果线圈中的电流是由电容器放电产生的, 则可以用下式表示:

$$i(t) = \frac{V_0}{L\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t$$

上式带入(18), (19)可计算电磁场的值。

致谢

本文得到辽宁省教育厅创新团队项目(2009T093)的资助。

References (参考文献)

- [1] Stratton J.A, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1941
- [2] Erik Hallen, Electromagnetic Theory. London: Chapman & Hall, 1962. p.226-231
- [3] Xi Dingping, Bessel functions, Beijing, Higher Education Press, 1998, p.164
- [4] Wang Zhuxi, Guo Dunren, Special Functions, Beijing, Science Press.