

# 第一章

## 混沌动力学和模糊神经网络概述

### 1.1. 混沌动力学

混沌的发现及混沌动力学的建立是由来自不同领域的众多科学家共同完成的。混沌是确定性系统中存在的类随机运动，由与之相联系的动力系统来描述。混沌是自然界中普遍存在的现象，如在化学中(Belousov-Zhabotinski 反应)，在非线性光学中(激光)，在电子学(Chua-matsumoto 电路)，在流体动力学(Rayleigh-Bénard 对流)等。实际上，混沌不仅是一个数学概念更是被仔细观测并剖析的物理现象。从本质上说，混沌是一种关于过程的科学而不是一种关于状态的科学，是关于演化的科学而不是关于存在的科学[8]-[11]。混沌行为的最本质特点是非线性系统对于初始状态的极端敏感性，即两条初始值有着微小差别的轨道随着时间的演化而指数分离。

#### 1.1.1. 混沌动力学的形成与发展

法国著名数学家庞加莱(J. H. Poincaré)是混沌动力学研究的鼻祖。1881~1886 年间，Poincaré 创立了微分方程的定性理论。在对天体力学的研究中，他指出三体问题通常是不可积的，在同宿点附近，相空间轨迹是非常复杂的。该结果被认为是动力系统中具有混沌特征的第一征兆。随后，人们对同宿点附近的性质进行了大量的研究，逐步

认识到混沌动力学的复杂性与同宿点的关系[12]。

从 20 世纪五六十年代开始，混沌科学迅猛发展。1954 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫(A. N. Kolmogorov)在探索概率起源的过程中发表了《哈密顿(Hamilton)函数中微小变化时条件周期运动的保持》一文，得出了哈密顿系统中完全可积的系统在受到足够小的扰动后，绝大部分非共振环面仍可保留下来的结论。20 世纪 60 年代初，该结论由 Arnold 和 Moser 等人加以完善和证明，即为后人所称的 KAM 定理[13]-[15]。1964 年，乌克兰数学家沙尔可夫斯基(Sarkovskii)发现，如果单峰映射  $f$  具有周期  $p$ ，则在 Sarkovskii 序列意义下，一定导致存在周期  $q$ ，这一结果在相当长的一段时间里却鲜为人知[16]。随后，美国数学家斯梅尔(S. Smale)提出“马蹄”数学模型[17]，它是相空间中的一种拓扑变换，为理解动力系统混沌性质提供基础。Smale 指出“马蹄”存在一个混沌不变集，且在“马蹄”内有无穷多周期点和无穷多不稳定的无规则的震荡轨迹。1963 年，美国科学家洛伦兹(Lorenz)在研究大气对流时，发表了著名论文《决定性的非周期流》，提出了 Lorenz 方程。Lorenz 用数值方法揭示了该方程中存在混沌运动，并发现混沌极端敏感于初始条件这一基本性态，即“蝴蝶效应”。

20 世纪 70 年代，混沌学作为一门新的科学正式诞生。1971 年，法国物理学家茹厄勒(D. Ruelle)和荷兰数学家塔肯斯(F. Takens)共同发表《论湍流的本质》一文，首次利用混沌吸引子的结论解释了湍流产生的机制[18]。1975 年，华裔数学家李天岩(Tianyan Li)和美国数学家约克(James A. Yorke)发表题为《周期三意味着混沌》的著名论文[19]。首次引入“混沌”一词，并给出数学上的定义。1976 年，美国生态学家罗伯特·梅(R. May)在《Nature》上发表了题为《具有极复杂的动力学的简单数学模型》的论文，首次揭示了虫口模型(Logistic 方程)中通过倍周期分叉走向混沌[20]。1978~1979 年，费根鲍姆(M. J. Feigenbaum)对 May 提出的方程进行研究，发现混沌具有一些“普适性”[21]。例如，倍周期分叉过程中分叉间距的几何收敛率为 4.6692...

是个常数，这就是著名的 Feigenbaum 常数。此外 Feigenbaum 还把相变临界态理论中的普适性、标度性、重正化群等方法引入混沌研究，建立了一维映射混沌现象的普适理论。正是普适性的研究成果确立了混沌理论的科学地位。

20 世纪 80 年代，混沌科学得到进一步的发展。首先，在理论研究方面，1980 年数学家曼德尔布罗特(B. Mandelbrot)把分形理论引入到混沌研究中，使奇怪吸引子具有分数维[22]，推进了混沌理论的研究；另一个主要成就是将符号动力学应用于动力系统的研究，如表征系统混沌程度的拓扑熵与测度熵等。1980 年，帕卡德(Packard)等人提出相空间重构法[23]，Takens[24]给出了理论证明。其基本思想是：系统中的任一分量的演化都是由与之相互作用的其它分量所决定的，这一结论为从时间序列研究混沌提供理论基础。其次，在试验研究中发现了大量的混沌现象[25]-[36]，这些研究工作不仅丰富了混沌理论，而且极大的拓宽了混沌的应用领域。第三，从 20 世纪 80 年代中后期开始，混沌学与其他科学相互渗透、融合，形成一些交叉学科和技术。如混沌生物工程学、混沌计算机图形学、混沌图像处理、混沌智能信息处理等。到了 20 世纪 90 年代初，奥特(E. Ott)、格锐柏格(G. C. Grebogi)和约克(J. A. Yorke) [2]以及佩考拉(Pecora)和卡罗尔(Carroll)的开创性工作[3]，兴起了混沌控制与同步的研究热潮。

### 1.1.2. 动力学基本概念和混沌的定义

目前，尽管混沌已引起学术界的广泛关注，但是作为科学术语，至今仍没有被统一认可的定义。本小节首先引入有关动力学的几个基本概念，然后给出一些关于混沌的数学描述。对于一般高维自知系统

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n. \quad (1.1)$$

**定义 1.1.**  $\omega$ —极限集