

# Continuation Method for Voltage Stability Based on Singular Perturbation Method

Shixuan Lu, Jiakuan Xia, Xin Mi

Department of Electrical Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, Liaoning, China

**Abstract:** The dynamic of a large class of power systems can be represented by parameter dependent differential-algebraic equations (DAE) of the form  $x=f(x,y,p)$  and  $0=g(x,y,p)$ . When the parameter  $p$  of the system (such as load of the system) changes, the stable equilibrium points may lose its dynamic stability at local bifurcation points. The systems will lose its stability at the feasibility boundary, which is caused by one of three different local bifurcations: the singularity induced bifurcation, saddle-node and Hopf bifurcation. In this paper, the dynamic voltage stability of power system will be introduced and analyzed. Perturb and Taylor's expansion (PTE) technique is used to describe the DAE by singularly perturbed original differential equations (ODE), and equilibrium manifold is solved by continuation method. The analysis avoids the singularity induced infinity problem, which may happen at reduced Jacobian matrix analysis, and is more computationally attractive.

**Keywords:** voltage collapse, voltage stability, bifurcation, differential-algebraic equations, singularity

## 1 引言

一般電力系統模型可以用下列非線性微分-代數方程組描述<sup>[1-3]</sup>:

$$x = f(x, y, p) \quad f: \mathbb{R}^{n+m+q} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$0 = g(x, y, p) \quad g: \mathbb{R}^{n+m+q} \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2)$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad g=(g_1, g_2)^T, \quad p \in P \subset \mathbb{R}^q$$

其中:

$f$  → 定義發電機、勵磁機、負荷等的動態特性;

$g$  → 代表網路的潮流模型, 可表示為  $g=(g_1, g_2)^T$ ,  $g_1$  為有功潮流模型,  $g_2$  為無功潮流模型。微分狀態變數  $x$ , 代數狀態變數  $y$  及控制參量  $p$  可表示為:  $x=(\delta, \omega, E, E'_{fd})$ ;  $y=(V, \theta)$ ;  $p=(P_L, Q_L)$  等。 $\delta$ —發電機功角;  $\omega$ —發電機、電動機角速度;  $E'$ —發電機、電動機暫態電勢;  $E_{fd}$ —勵磁機輸出電勢;  $V, \theta$ —PV、PQ 節點電壓和相角;  $P_L, Q_L$ —負荷有功功率和無功功率<sup>[4-6]</sup>。

本文應用奇異攝動和泰勒展開理論<sup>[7]</sup>, 構造了未化簡的雅克比矩陣, 並採用延拓法追蹤平衡解流形, 對電力系統電壓穩定性進行分析, 避免了在求取化簡雅克比矩陣中經常出現的奇異誘導無窮問題, 而且計算更加簡便。

## 2 微分-代數方程和奇異攝動的關係

### 2.1 構造化簡的雅克比矩陣

對一個特定的  $p$  值, 平衡點是(3)(4)式系統的一個解

$$f(x, y, p) = 0 \quad (3)$$

$$g(x, y, p) = 0 \quad (4)$$

$$\Delta \dot{x} = J_u \Delta x = J_u \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (5)$$

此處的  $J_u$  是微分-代數系統的為化簡的雅克比矩陣

$$J_u = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \quad (6)$$

假設  $g_y$  是非奇異的, 則可以消掉(5)式中的  $\Delta y$

$$\Delta \dot{x} = J_u \Delta x \quad (7)$$

所以

$$A = F_x = [f_x - f_y g_y^{-1} g_x] \quad (8)$$

### 2.2 用奇異攝動的方法構造未化簡的雅克比矩陣

將(1)(2)式轉化為奇異攝動常微分方程<sup>[8-9]</sup>

$$J_u = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ \frac{1}{\xi} g_x^{FD} & \frac{1}{\xi} g_y^{FD} \end{bmatrix} \quad (9)$$

應用泰勒展開並忽略高階條件,可以得到

$$g_y(y, p)\xi \cdot \dot{y} = -g(x, y, p) \quad (10)$$

如果  $g_y$  非奇異, 則

$$\xi \cdot \dot{y} = -g_y(y, p)^{-1} g(x, y, p) \quad (11)$$

而且

$$\dot{y} = \frac{1}{\xi} g^{FD} = -\frac{1}{\xi} g_y^{-1} g \quad (12)$$

上式給出了快動態的經典運算式。所以,奇異攝動常微分方程可描述為

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, p, \xi) \\ \dot{y} &= -\frac{1}{\xi} g_y^{-1} g \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

相應的雅克比矩陣可寫為

$$J_u = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ \frac{1}{\xi} g_x^{FD} & \frac{1}{\xi} g_y^{FD} \end{bmatrix} \quad (14)$$

為了進行特徵值分析,對每個平衡點上的  $J_u$  進行計算。由(12)式可得

$$g_y g^{FD} = -g \quad (15)$$

分別對  $x$  和  $y$  求式(15)的偏微分, 可得

$$g_{yy} g^{FD} + g_y g_y^{FD} = -g_y \quad (16)$$

$$g_{yx} g^{FD} + g_y g_x^{FD} = -g_x \quad (17)$$

當  $g_y$  非奇異時, 將(15)式代入(16) (17)式得

$$-g_{yy} g_y^{-1} g + g_y g_y^{FD} = -g_y \quad (18)$$

$$-g_{yx} g_y^{-1} g + g_y g_x^{FD} = -g_x \quad (19)$$

在每個平衡點有  $g=0$ , 上面兩式變為

$$g_y^{FD} = -g_y^{-1} g_y = -I_{axa} \quad (20)$$

$$g_x^{FD} = -g_y^{-1} g_x \quad (21)$$

或

$$\frac{1}{\xi} g_x^{FD} = -\frac{1}{\xi} I_{axa} \quad (22)$$

$$\frac{1}{\xi} g_x^{FD} = -\frac{1}{\xi} g_y^{-1} g_x \quad (23)$$

這裏的  $I_{m \times m}$  是  $a \times a$  的單位陣, 此時的  $J_u$  變為

$$J_u = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ -\frac{1}{\xi} g_y^{-1} g_x & -\frac{1}{\xi} I_{a \times a} \end{bmatrix} \quad (24)$$

對電力系統來說,  $a$  通常是很大的, 所以  $J_u$  是一個稀疏矩陣, 可以使用稀疏理論來求它的特徵根, 會使運算速度明顯加快。

### 3 延拓法追蹤平衡流形

#### 3.1 延拓法簡介

以常微分方程表示的動力學系統為

$$\dot{x} = f(x, a), x \in R^n, a \in R^1$$

式中:  $x$  為狀態變數,  $a$  為可變參數。

式(1)的平衡點滿足方程  $\dot{x} = f(x, a)$ , 可以認為, 該方程在  $n+1$  維空間  $y \equiv (x, a) \in R^n \times R^1$  定義了一個 1 維的廣義曲線(或稱流形)  $m$ , 稱之為平衡解流形或平衡解曲線, 而延拓法可用來追蹤該流形, 它是用一系列滿足平衡點要求的離散點  $(y^1, y^2, \dots)$  來逼近曲線  $m$  的。在追蹤該流形的過程中, 通過檢測局部分岔條件來判斷是否在該流形上存在分岔點。

#### 3.2 平衡解流形的追蹤

為了簡便, 在不引起歧義的基礎上, 忽略式(3)、(4)中  $x, y$  之間的物理差異, 並考慮單參數情形下, 將其改寫為一般形式

$$H(x, p) = 0 \quad (25)$$

平衡解流形可以表示為

$$m = \{(x, p) \in R^{n+1} \mid F(x, p) = 0\}$$

進一步忽略狀態變數  $x$  與參變數  $p$  的差別, 式(25)可以進一步改寫為

$$H(z) = 0$$

其中

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_{k+1})^T = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, p)^T$$

$$H : R^{k+1} \rightarrow R^k$$

設:

$$DH(z) = \begin{bmatrix} \partial H_1 / \partial z_1 & \partial H_1 / \partial z_2 & \cdots & \partial H_1 / \partial z_{k+1} \\ \partial H_2 / \partial z_1 & \partial H_2 / \partial z_2 & \cdots & \partial H_2 / \partial z_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial H_k / \partial z_1 & \partial H_k / \partial z_2 & \cdots & \partial H_k / \partial z_{k+1} \end{bmatrix}$$

令:

$$J_i = (-1)^{i+1} \cdot \det[\partial H / \partial z_1, \cdots, \partial H / \partial z_{i-1}, \partial H / \partial z_{i+1}, \cdots, \partial H / \partial z_{n+1}], (i = 1, 2, \cdots, n+1)$$

可以證明出  $\tau(z) = V(z) / \|V(z)\|$  是平衡解流形  $m$  的單位切向量<sup>[10]</sup>, 其中  $V(z) = [J_1, J_2, \cdots, J_{n+1}]^T$ 。可見, 只要已知  $\tau(z)$ , 便可瞭解  $m$  隨參數變化後的形狀。

為了連續追蹤  $m$ , 克服常規演算法中  $D_x H(x, p)$  奇異時, 計算無法進行的缺點, 這裏引入弧長參數  $s$ , 並將  $\Delta z$  投影到  $\tau(z)$  方向, 由於  $\Delta s$  取得很小, 因此有約束方程

$$T(z) = \begin{bmatrix} H(z) \\ \Delta z \cdot \tau(z - \Delta s) \end{bmatrix} = 0$$

$\tau(z)$  可看成  $m$  的一個誘導向量場, 它伴隨著一個動力系統

$$\left. \begin{aligned} dz / ds &= \tau(z) \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

一個流形  $n (n \subset R^{n+1})$  稱為向量場  $\tau(z)$  的不變流形, 是指  $\forall z \in n$ , 在動力系統(12)式決定的流動之下, 它仍保持在  $n$  上。

根據拓撲理論, 如果  $DH(z) \cdot \tau(z) = 0$ , 且在  $n$  上沒有孤立奇點, 則平衡解流形  $m$  與不變流形  $n$  等價。換言之, 追蹤  $m$  可轉化為追蹤由(26)式所表示的初值常微分方程問題的不變流形  $n$ 。求解初值常微分方程的方法有很多, 本文採用速度和精度都較為理想的四階龍格—庫塔法。

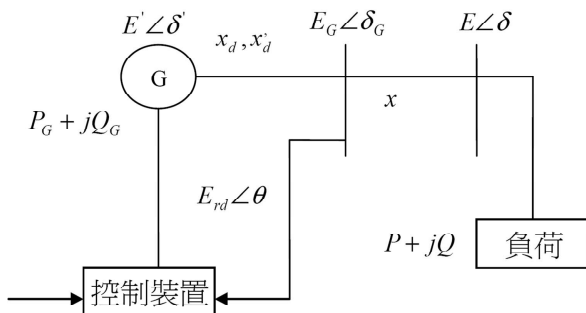


圖 1. 單機單負載的雙匯流排系統  
Figure 1. Simple two bus system

## 4 算例應用及結果分析

為了能從機理方面研究奇異誘導分岔對電壓穩定性的影響, 可用一個單機單負載的雙匯流排系統進行驗證<sup>[11]</sup>。

在這個算例中, 研究了給定系統的電壓穩定問題, 並且假定無功負荷是時變的參數。同時, 為了將電壓的動態穩定問題從功角穩定中獨立出來, 在圖1中採用了“經典”發電機模型並忽略了功角的動態穩定。使用一個化簡的IEEE-1 型勵磁系統<sup>[12]</sup>,

系統的數學模型可以表述為

$$\dot{E}' = \frac{1}{T_{d0}} \left[ -\frac{x+x_d}{x_d} E' + \frac{x_d-x_d'}{x'} \cdot \frac{(E^2+x'Q)}{E'} + E_{fd} \right] \quad (27)$$

$$\dot{E}_{fd} = \frac{1}{T} \left[ -(E_{fd} - E_{fd0}) - K \left( \frac{1}{E} \sqrt{(xP) + (xQ + E^2)^2} - E_r \right) \right] \quad (28)$$

$$0 = E'^2 E^2 - (x'P)^2 - (x'Q + E^2)^2 \quad (29)$$

通過前一部分的分析, 可以將式(29)改寫為

$$\xi \cdot \dot{E} = E'^2 E^2 - (x'P)^2 - (x'Q + E^2)^2 \quad (30)$$

對這個例子來說,  $x = [E, E_{fd}]^T, y = E, p = [P, Q]^T$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{d0}} \left[ -\frac{x+x_d}{x_d} \frac{x_d-x_d'}{x'} \cdot \frac{(E^2+x'Q)}{E^2} \right] & \frac{1}{T_{d0}} \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$f_y = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{d0}} \left[ \frac{x_d-x_d'}{x'} \cdot \frac{2E}{E^2} \right] \\ -\frac{1}{T} \cdot K \left[ -\frac{1}{E} \sqrt{(xP) + (xQ + E^2)^2} + \right] \\ \frac{1}{E} \cdot \frac{(xQ + E^2) \cdot 2E}{\sqrt{(xP) + (xQ + E^2)^2}} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$g_x = \begin{bmatrix} \frac{2E'E^2}{\xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$g_y = \frac{(2E'^2 E - 2(x'Q + E^2) \cdot 2E)}{\xi} \quad (34)$$

$$T_{d0} = 5, T = 1.5, E'_{fd} = 1, x_d = 1.2, x = 0.1, x'_d = 0.2, Q = 0.5P \quad (35)$$

系統參數： $K = 2.5, E_r = 1, \xi = 0.0001, x' = x + x_d'$

隨著 $p$ 的逐漸變化，可得到如圖2所示的P-V圖，其中包含三種分岔：霍普夫分岔(A點)，鞍節分岔(B點)，奇異誘導分岔(C點)<sup>[9]</sup>。

根據上面的數學模型和計算結果，我們可以對這個算例分析如下：

(1) 在本例中，霍普夫分岔點(A點)是由控制器本身造成的(勵磁控制器的增益 $K$ 設置過大，如果 $K$ 值小一些，將不會產生霍普夫分岔)。從數學的角度來說，化簡和未化簡的雅克比矩陣都至少有一對特徵根會變成虛數

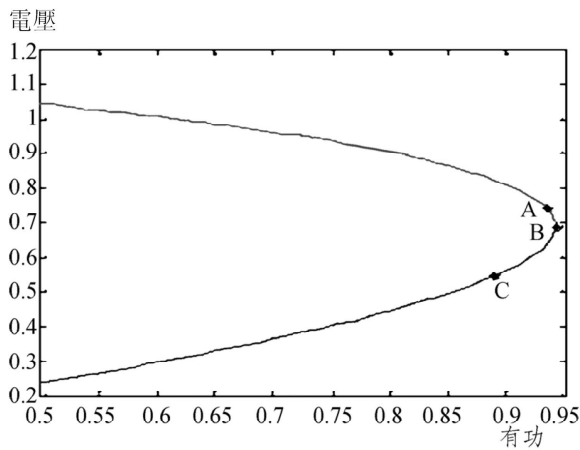


圖 2. 算例系統的P-V圖  
Figure 2. P-V Curve of the sample system

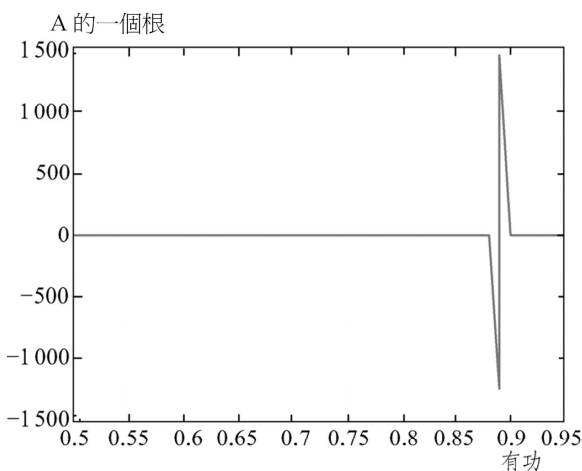


圖 3. 在P-V圖的下半部分 C點發生奇異誘導分岔時，矩陣A的一個特徵根的軌跡

Figure 3. One of eigenvalues of the reduced a matrix at lower part of the P-V as p varies, where a singularity occurred at point c

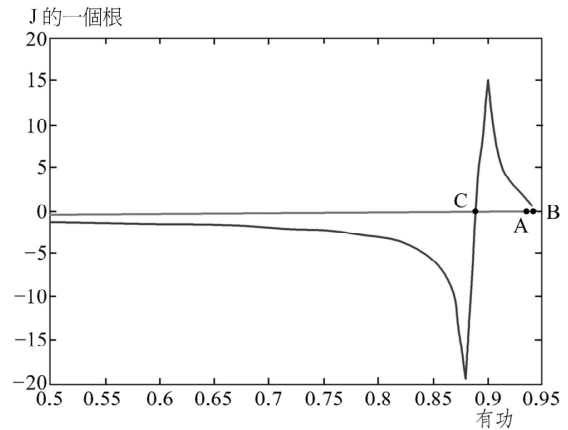


圖 4. 矩陣J的一個特徵根的軌跡  
Figure 4. One of eigenvalues of unreduced J matrix

(實部由負變為正)。從物理的角度來說，這意味著系統將發生震盪並失去穩定。

(2) 鞍節分岔點(B點)是系統的電壓崩潰點，矩陣A和J至少有一個特徵根將變成零，一個特徵根將改變符號，同時系統將失去動態電壓穩定。

(3) 在奇異誘導分岔點C，至少有一個矩陣A的特徵根將從正無窮變為負無窮，它的計算和分析都非常麻煩。使用本文提出的未化簡的雅克比矩陣分析方法，特徵根一直是連續的，即使在點C也沒有奇異誘導無窮情況發生，如圖4所示。

(4) 示例系統的不穩定區域，是在圖 2 中弧(ABC)所確定的區域。

(5)  $\xi$ 的值的選擇取決於功率步長的精度。就這個例子來說，如果功率步長的精度是0.001， $\xi$ 在A點附近的最大有效值為0.002 86。

從上面的分析可以看出，未化簡的雅克比矩陣可以避免奇異誘導無窮問題，而且計算更加簡便。

## 5 結論

本文研究了電力系統電壓穩定中的分岔問題，使用奇異攝動的方法構造未化簡的雅克比矩陣，並使用延拓法直接追蹤平衡解流形。

(1) 未簡化的雅克比矩陣可以避免在簡化的雅克比矩陣中常出現的奇異誘導無窮問題。

(2) 延拓法處理的方程在形式上保存了電力系統穩定分析的資料結構的稀疏性，同時在計算過程中既避免了直接計算大型矩陣的特徵值或行列式值，又提供系統的臨界特徵值和相應的右特徵向量等資訊。

最後，通過一個典型電力系統算例結果可知，該方法是可行的。

**REFERENCES**

- [1] Carson W. Taylor, *Power System Voltage Stability*, McGraw-Hill, 1994.
- [2] Prabha Kundur, *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill, 1994.
- [3] Costas Vournas, *Voltage Stability of Electric Power Systems*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [4] L. O. Chua and A. C. Deng, Impasse points-Part II: Analytical Aspects, *Int J Circuit Theory Appl*, 1989, 17(3):271–282.
- [5] I. A. Hiskens and D. S. Hill, energy function, transient stability and voltage behavior in power systems with nonlinear loads, *IEEE Trans PAS*, 1989, 4(4): 1525–1533.
- [6] V. Venkatasubramanian, H. Schaettler and J. Zaborazky, Global voltage dynamics: study of a generator with voltage control, transmission and matched MW load, *Proc IEEE CDC*, 1990, 6: 3045–3056.
- [7] P. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Academic Press, 1986.
- [8] A. K. Zvonkin and M. A. Shubin, Non-standard analysis and single perturbations of ordinary differential equations, *Russian Mathematical Surveys*, 1984, 39(2): 69–131. 74, 2008.
- [9] Venkatasubramanian, Schaettler and Zaborazky, Local Bifurcations Feasibility Regions in Differential- Algebraic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(12): 1992–2013.
- [10] Peng Zhiwei, Hu Guogen, Han Zhenxiang. Tracing of the power system equilibrium solution manifold and searching for the instability bifurcation point. *Proceedings of the CSEE*, 1998, 18(3): 173–177.
- [11] V. Venkatasubramanian, H. Schaettler and J. Zaborazky, Voltage Dynamics: Study of a Generator with Voltage Control, Transmission, and Matched MW Load, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1992, 37(11): 1717–1733.
- [12] IEEE Committee Report, Excitation System Models for Power System Stability Studies, *IEEE Trans. Power Apparatus System*, 1981, v PAS-100(2): 494–509.