

# GLONASS Orbit Integration Algorithm and Accuracy Analysis

DAI Xiaolei<sup>1,3</sup>, SHI Chuang<sup>1,2</sup>, WANG Fuhong<sup>3</sup>

<sup>1</sup>. GNSS Research Center, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China

<sup>2</sup>. State key laboratory of Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China

<sup>3</sup>. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China

e-mail: daixlei@126.com

**Abstract:** This paper considers the issues of the GLONASS broadcast orbit computation; then studies on the affects of numerical integration algorithm on the precision of orbit integration; and finally, evaluates the precision of orbit integration by using the IGS precise ephemeris. The computation results show that the RMS of internal orbit is 2.6m in the radial, 4.4m in the tangential and 3.5m in the normal.

**Keywords:** GLONASS; orbit integration; runge-kutta method; PZ-90

## GLONASS 卫星轨道积分方法及其精度分析

戴小蕾<sup>1,3</sup>, 施 闯<sup>1,2</sup>, 王甫红<sup>3</sup>

1. 武汉大学卫星导航与定位技术研究中心, 武汉市珞瑜路 129 号, 430079

2. 武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室, 武汉市珞瑜路 129 号, 430079

3. 武汉大学测绘学院, 武汉市珞瑜路 129 号, 430079

e-mail: daixlei@126.com

**摘要:** 介绍了利用 GLONASS 广播星历计算卫星轨道的方法, 分析了积分算法对轨道积分精度的影响, 并利用 IGS 提供的 GLONASS 卫星的精密星历对积分轨道进行精度评定, 计算结果表明, 积分轨道的 RMS 值在径向, 切向和法向分别可达到 2.6m, 4.4m 和 3.5m 的精度。

**关键词:** GLONASS; 轨道积分; 龙格—库塔积分; PZ-90

### 1 引言

随着 GLONASS 导航星座逐渐完善, GPS/GLONASS 的组合导航定位的精度将进一步得到提高。多卫星导航系统的存在, 不仅可以提高定位精度和可靠性, 而且可以打破一国垄断的状况, 提高导航定位的安全性。GPS 导航定位技术的成熟性, 成就了其在国际上的垄断地位。GLONASS 导航系统自身的发展进程, 导致了其受关注的程度相对较少, 虽然其技术也很成熟, 但在导航定位领域, 还无法和 GPS 导航系统相抗衡。另一方面, 由于 GLONASS 的地面监测系统建在俄罗斯境内, 卫星定轨属于局部区域的定轨, 其轨道精度明显低于 GPS 卫星, 而且在没有地面监测弧段的轨道精度的不一致, 也导致导航定位精度的不均衡性, 因此研究和分析 GLONASS 卫星轨道的积分方法, 对 GPS/GLONASS 组合定位的开展将很有意义。

### 2 GLONASS 广播星历卫星轨道的计算方法

设任一时刻  $t$ , 卫星在地固坐标中的位置向量为  $x(t)$ , 经过相关数学推导<sup>[1]</sup>, 得到地固系下的卫星运动方程为:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix} = -\frac{GMe}{r^3} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega(ax_1(t) + 2\dot{x}_2(t)) \\ \omega(ax_2(t) - 2\dot{x}_1(t)) \\ 0 \end{bmatrix} + 1.5\frac{GMe}{r^5} R_e^2 C_2^0 \begin{bmatrix} x_1(1-5x_3^2)/r^2 \\ x_2(1-5x_3^2)/r^2 \\ x_3(3-5x_3^2)/r^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{s/1} \\ a_{s/2} \\ a_{s/2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中,  $a_{si}$  为卫星星历中给出的、地固坐标系中的太阳和月亮的摄动加速度。PZ-90.02 坐标系中相应的常数为: 地球自转速度  $\omega = 0.00007292115 \text{ rad/s}$ , 地球引力常数  $GMe = 398600.4418 \text{ km}^3/\text{s}^2$ , 地球平均半径  $R_e = 6378136 \text{ m}$ , 地球重力场系数

资助项目: 国家 973 计划资助项目(2006CB701301)  
国家 863 计划资助项目(2007AA12Z345)

$$C_2^0 = -0.0010826257^{[1]}.$$

GLONASS 卫星在地固系中的运动方程(1)为一个二阶常微分方程组, 由于很难求得解析解, 在实际计算过程中, 常采用数值积分的方法对其进行处理。ICD-95(The GLONASS Interface Control Document)推荐采用四阶的 Runge-Kutta 积分算法, 这是目前使用最广泛, 精度较高且容易实现的一种数值积分方法<sup>[2]</sup>。Runge-Kutta 法的基本思想是利用  $f(x, y)$  在积分区间  $[t_n, t_{n+1}]$  上若干点处右函数值的线性组合来代替  $f$  的导数, 然后按泰勒公式展开确定相应的系数, 从而避免了高阶导数计算的困难, 同时也能保证一定得的精度。

### 3 GLONASS 卫星轨道积分计算精度的影响因素

在用GLONASS广播星历计算卫星位置时, 一般推荐采用简化的摄动力模型, 即能达到相当的精度, 在此就不做详细讨论。由于积分误差的累积性, 积分区间和积分步长的不同会影响轨道积分的精度, 下面主要讨论这两个因素对GLONASS卫星轨道精度的影响。

四阶的龙格-库塔(RK)方法应用广泛, 具有容易实现且效率较高的特点, 但有截断误差难以估计的缺点, 只适合于精度要求较低的问题, 在精度要求较高的卫星运动方程数值积分时, 可采用 Fehlberg

**Table 1. The difference values between the RK4 and RKF7(8) (m)**  
**表1. 4阶RK积分结果与RKF7(8)阶积分结果坐标差值统计表(单位: m)**

积分区间(min)	积分步长(s)	坐标分量互差	最大值	最小值	RMS
15	1	X方向	$1.93 \times 10^{-7}$	$-1.64 \times 10^{-7}$	$6.18 \times 10^{-8}$
		Y方向	$1.16 \times 10^{-7}$	$-1.71 \times 10^{-7}$	$5.78 \times 10^{-8}$
		Z方向	$2.07 \times 10^{-7}$	$-1.67 \times 10^{-7}$	$6.20 \times 10^{-8}$
	30	X方向	$3.54 \times 10^{-5}$	$-3.60 \times 10^{-5}$	$1.96 \times 10^{-5}$
		Y方向	$3.59 \times 10^{-5}$	$-3.60 \times 10^{-5}$	$1.86 \times 10^{-5}$
		Z方向	$1.49 \times 10^{-5}$	$-1.52 \times 10^{-5}$	$1.14 \times 10^{-5}$
	60	X方向	$5.68 \times 10^{-4}$	$-5.76 \times 10^{-4}$	$3.13 \times 10^{-4}$
		Y方向	$5.75 \times 10^{-4}$	$-5.76 \times 10^{-4}$	$2.97 \times 10^{-4}$
		Z方向	$2.38 \times 10^{-4}$	$-2.43 \times 10^{-4}$	$1.83 \times 10^{-4}$
	120	X方向	0.01	-0.01	0.01
		Y方向	0.01	-0.01	0.01
		Z方向	0.00	0.00	0.00
30	1	X方向	3.53	-2.67	1.19
		Y方向	3.44	-2.96	1.12
		Z方向	2.82	-2.58	1.09
	30	X方向	3.53	-2.67	1.19
		Y方向	3.44	-2.96	1.12
		Z方向	2.82	-2.58	1.09
	60	X方向	3.53	-2.68	1.19
		Y方向	3.44	-2.96	1.12
		Z方向	2.82	-2.58	1.09
	120	X方向	3.54	-2.68	1.19
		Y方向	3.44	-2.96	1.12
		Z方向	2.82	-2.58	1.09
60	1	X方向	14.26	-8.00	4.30
		Y方向	11.60	-10.85	4.69
		Z方向	9.48	-8.81	4.07
	30	X方向	14.26	-8.00	4.30
		Y方向	11.60	-10.85	4.69
		Z方向	9.48	-8.81	4.07
	60	X方向	14.26	-8.01	4.30
		Y方向	11.60	-10.85	4.69
		Z方向	9.48	-8.81	4.07
	120	X方向	14.29	-8.03	4.30
		Y方向	11.59	-10.85	4.69
		Z方向	9.46	-8.83	4.07
90	1	X方向	37.08	-25.64	10.56
		Y方向	26.34	-29.42	12.15
		Z方向	22.88	-20.61	9.75
	30	X方向	37.08	-25.64	10.56
		Y方向	26.34	-29.42	12.15
		Z方向	22.88	-20.61	9.75
	60	X方向	37.08	-25.64	10.56
		Y方向	26.34	-29.42	12.15
		Z方向	22.88	-20.61	9.75
	120	X方向	37.11	-25.67	10.57
		Y方向	26.31	-29.44	12.15
		Z方向	22.85	-20.60	9.75

提出的 Runge-Kutta-fehlberg 方法(RKF)<sup>[3]</sup>。为了分析积分方法引起的误差,采用 RKF7(8)阶积分算法,积分步长设为 1s,积分区间为 15min,以此积分出的卫星轨道作为标准轨道,然后用四阶龙格-库塔积分算法,采用不同的积分区间和积分步长来积分卫星位置,同标准轨道比较,从而得出四阶龙格-库塔算法对轨道积分精度的影响。表 1 为四阶 RK 轨道积分结果与 RKF7(8)阶轨道积分结果的差值统计表。

从表1可以看出,当积分区间相同时,积分步长对卫星轨道精度的影响很小,通常在毫米级,积分时间是影响积分精度的主要原因,轨道精度随着积分时间的增大而减小。当积分区间为30min时,差值的单位权中误差为1m左右,当积分区间为90min时,差值的单位权中误差达12m,因此积分区间应控制在30min之内,顾及计算速率,可将步长设为120s。

通过以上的分析可知,在实际应用时,采用四阶龙格-库塔积分算法,积分步长设为120s,积分区间在15min左右,即可获得较高的精度,如果为了提高计算速率,在误差允许范围内,积分区间也可扩大到30min。

#### 4 利用广播星历计算卫星轨道的精度评定

2005年起,IGS开始公布GLONASS的精密星历,其精度为15cm,为了评定利用广播星历计算卫星轨道的精度,现将内插出的任意时刻的精密星历作为标准轨道,同广播星历积分出的卫星轨道进行比较。由于GLONASS精密星历、广播星历各自的参考时间基准和卫星位置所在的参考框架都不同,因此在精度评定之前,还需进行时间系统和坐标系统的统一。

GLONASS精密星历采用的是GPST,以UTC(USNO)(United States Naval Observation)为时间度量基准,与国际时间局BIPM维护的UTC(BIPM)的差别在20ns以内,它是个连续的时间标度,没有闰秒。GLONASS广播星历采用世界时作为时间量度基准,采用的时间系统是UTC(SU),与UTC(BIMP)相差数微秒。由于有闰秒改正,所以GLONASS与UTC(SU)不存在整秒差,但是存在3个小时的时差。根据GPST和GLONASS同UTC(BIMP)之间的关系可知<sup>[6]</sup>:

$$GPST = GLONASS - \tau C + (\Delta T - 19s) - 03^h 00 \quad (2)$$

其中,  $\Delta T$  为跳秒,  $\tau C$  在 GLONASS 广播星历中已给出。在实际应用时,要注意跳秒中是否包含了19s的差值,同时 IGS 发布的 GLONASS 广播星历中已经顾及了3小时的时差问题。

GLONASS广播星历在2007年9月20日之前采用PZ-90坐标系,之后采用PZ-90.02坐标系,IGS发布的GLONASS精密星历采用ITRF2000框架,二者的转换常采用7参数坐标转换关系式:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & -R_3 & R_2 \\ R_3 & D & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} \quad (3)$$

由式(3)可知,如果给出了三个平移参数、三个旋转参数和一个尺度因子,就能确定两个坐标系统具体的转换关系。PZ-90坐标系ITRF的具体转换参数值参见文献[4]。PZ-90.02同ITRF的差异较小,一般为2-7m,二者的转换公式为<sup>[5]</sup>:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{(ITRF)} = \begin{bmatrix} -0.36m \\ 0.08m \\ 0.18m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{(PZ-90.02)} \quad (4)$$

由于PZ-90和PZ-90.02坐标系统,同ITRF的转换精度有所不同,因此下面通过具体算例分别评定2007年9月20日之前和之后的轨道积分精度。

轨道积分均采用4阶龙格-库塔变步长数值积分算法,初始积分步长设为120s,积分时间在15min之内,精密星历的计算采用8阶切比雪夫多项式拟合。

(1) 2007年9月20日之前, GLONASS采用PZ-90坐标系时轨道积分精度评定

计算采用的是7号卫星,2007年9月13日至19日一周的GLONASS广播星历和精密星历数据。图1为GLONASS 7号卫星轨道积分结果同精密星历在R、T、

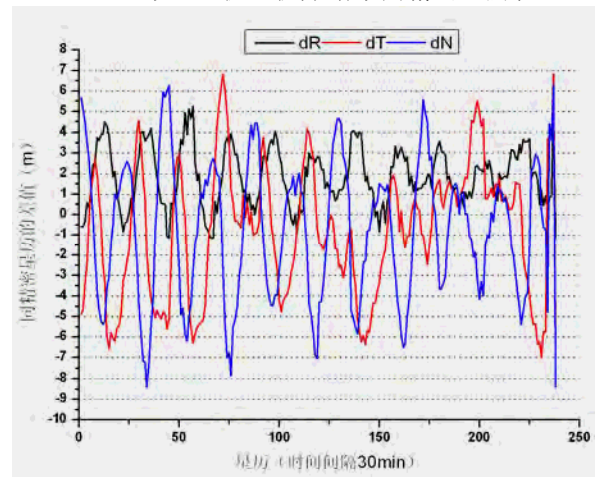


Figure 1. The precision of GLONASS 07 in the direction of radial, tangential and normal(PZ-90)

图1. GLONASS 7号卫星在R、T、N方向的精度(PZ-90)

N方向差值的时序图。

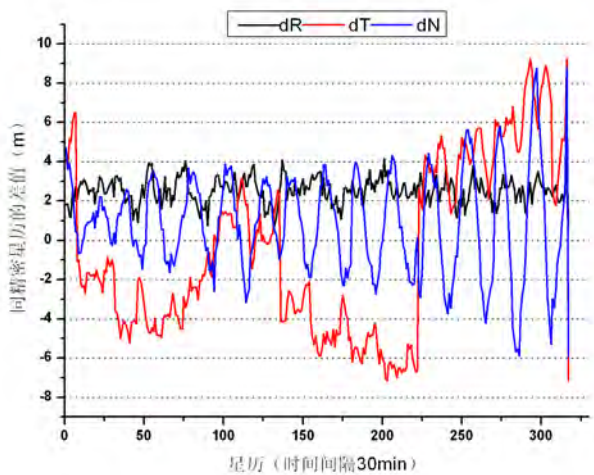
(2) 2007年9月20日之后, GLONASS采用PZ-90.02坐标系统时轨道计算精度

计算采用的是07号卫星, 2009年3月1日至7日一周的GLONASS广播星历和精密星历数据, 图2为GLONASS采用PZ-90.02坐标系时, 广播星历轨道积分结果同精密星历在R、T、N方向的差值时序图。

表2 为GLONASS卫星轨道积分结果同精密星历在R、T、N方向的差值的统计表。

**Table 2. The statistics of orbit integration precision (PZ-90)**  
**表2. GLONASS广播星历计算轨道的精度统计(PZ-90)**

	R方向 (m)	T方向 (m)	N方向 (m)
最大值	5.26	6.82	6.27
最小值	-1.16	-7.00	-8.41
RMS值	2.31	3.24	3.43



**Figure 2. The precision of 07 satellite in the direction of radial, tangential and normal**

**图2. GLONASS 7号卫星R、T、N方向的精度(PZ-90.02)**

表3为GLONASS采用PZ-90.02坐标系时, 广播星历轨道积分结果同精密星历的差值统计表。

**Table 3. The statistics of orbit integration precision (PZ-90.02)**  
**表3. GLONASS广播星历计算轨道的精度统计(PZ-90.02)**

	R方向(m)	T方向(m)	N方向(m)
最大值	4.15	9.26	8.76
最小值	0.71	-7.16	-5.90
RMS值	2.60	4.39	2.67

从上面两个时段的计算可以看出, 不管是07年还是09年的轨道积分结果, 在R、T、N三个方向的最大偏差都在10m之内, R方向的精度最好, 其偏差基本在5m之内, 但09年的轨道积分结果在切向(T)有时有较大的跳变, 这说明GLONASS卫星轨道还不是很稳定。

## 5 结 语

利用GLONASS广播星历进行轨道积分时, 由于积分误差的累积性, 积分步长和积分区间对精度的影响较大, 当积分区间相同时, 积分步长对精度的影响相对较小, 可设在120s之内, 为了保证积分精度, 应尽量将积分区间控制在15min之内, 在精度要求范围之内, 为了提高积分效率, 也可将积分区间扩展至30min。

当采用简化的摄动力模型和GLONASS ICD文档推荐的四阶龙格-库塔轨道积分算法时(积分区间在15min之内), 利用GLONASS广播星历进行卫星轨道积分时, 其精度在R、T、N方向分别 可达到2.6m、4.4m和3.5m, 这个精度与IGS播发的GLONASS广播星历的精度相当, 可见在利用广播星历积分卫星位置时, 采用上述的算法完全可以满足精度要求。

## References (参考文献)

- [1] GE RongMao, GUO JingJun, GE ShengJie. GLONASS satellite coordinate computation.[J]. Bulletin of Geomatics, 1999(2) 2-4. 葛茂荣, 过静珺, 葛胜杰. GLONASS 卫星坐标的计算方法[J]. 测绘通报, 1999(2):2-4.
- [2] Mike Stewart, Maria Tsakiri. GLONASS Broadcast Orbit Computation. GPS Solutions, vol 2, NO 2, pp:16-27(1998).
- [3] ZHAO QiLe(2004). Research on Precision Orbit Determination Theory and Software of both GPS Navigation Constellation and LEO Satellites.[D]. Wuhan University, 2004. 赵齐乐(2004). GPS 导航星座及低轨卫星的精密定轨理论和软件研究[D]. 武汉大学, 2004 年.
- [4] CHEN JunYong. Coordiante Transformation between GPS and GLONASS. Bulletin of Geomatics, 2002(7): 1-2. 陈俊勇. GPS 和 GLONASS 定位成果的坐标转换[J]. 测绘通报, 2002(7): 1-2.
- [5] Sergey Revnivkykh. GLONASS Status and Progress. 21 October, 2008.
- [6] SUN DunChao. Study on the issue of GPS/GLONASS combined application. Electronic science and technology university, 2006. 孙敦超. GPS/GLONASS 组合应用相关问题研究[D]. 电子科技大学, 2006.