

Time Series Analysis and Prediction on Ionospheric VTEC Data

LI Shuhui¹, PENG Junhuan²

School of Land Science and Technology, China University of Geosciences(Beijing), Beijing, China

1. li.shuhui@163.com, 2. pengjunhuan@163.com

Abstract: The propagation of electromagnetic wave signal has been severely affected by the ionosphere. It is very important for the ionospheric total electron content (TEC) to be predicted in the earth-based or space-based systems, which are related to the propagation of electromagnetic wave. Since the ionospheric TEC is affected by many factors and there is high complexity and non-linearity between every factor and TEC value, this paper will use the method of time series analysis. It is unnecessary to understanding clearly the dynamic mechanism while applying the method, except for discovering the rules on the past records themselves. From the ionospheric product of CODE (Center for Orbit Determination in Europe), this paper has extracted vertical total electron content (VTEC) values, located in two sites of different latitude and observed in past several years. First of all, the Fourier and Wavelet Transformations are applied to their periodic change rule and trending rule. Then the linear method named ARMA Modal and non-linear method named Chaotic Prediction method and neural network are respectively used for prediction on the ionospheric VTEC data. Finally, the results of the three prediction methods are compared and analyzed.

Keywords: vertical total electron content (VTEC), time series analysis, ARMA, chaotic prediction, neural network

电离层 VTEC 数据的时间序列分析和预报

李淑慧, 彭军还

中国地质大学, 北京 中国 100083

e-mail: pengjunhuan@163.com

摘 要: 电离层严重的影响电磁波信号在其中的传播, 电离层电子总量 TEC 的特征分析和预报对于涉及电波信号传输的地基或空基系统来说是非常重要的。由于电离层 TEC 受众多因素的影响, 各影响因素与 TEC 之间存在着高度复杂的相关性和非线性特征。本文在电离层动力学机制不明确的情况下, 采用时间序列的分析方法从电离层历史记录中寻找规律。针对 CODE 提供的电离层产品, 本文提取了不同纬度处多年的电离层垂直电子总量 VTEC 时间序列, 利用傅立叶变换和小波变换分析 VTEC 数据的周期变化规律, 并分别采用 ARMA 模型、混沌预测方法以及神经网络方法对电离层的 VTEC 数据进行了建模和预测。论文对三种预测方法得到的结果进行了对比并分析了各自的特点。

关键词: VTEC; 时间序列分析; ARMA; 混沌预测; 神经网络

1 引言

电离层影响穿过其中的电磁波信号的传播, 从而对通信、导航等领域具有重要的影响。而电子总量 (TEC) 是电离层的一个重要参数, 它与电磁波传播的影响直接相关。目前世界上有几个电离层电子含量检测中心, 他们几乎每天公布地面上空的电子含量。出于实际需要, 根据已测得的电子含量必须对未来的电子含量进行预报。但是电离层本身的各种参量是不确定和随机的, 在其演化过程中, 不断地与外界进行物质、能量的交换, 表现出复杂的行为。

电离层的预报模型一般可以分为经验模型和物理模型, 目前有 Klobuchar 模型, Bent 模型和 IRI 模型等。在 GPS 单频观测时, 一般采用 Klobuchar 模型,

但在一天内它只能预报出电子含量的 50%~60%, 最乐观的情形下也不超过 75%, 且对夜间的预报具有明显的不合理性, 因此对电离层电子含量的精确预报进行研究是有必要的。对于数小时至数天的电离层短期预测, 有学者采用时间序列方法, 利用以往的观测值记录进行预报^[1~5]。例如对垂直电子总量 VTEC 按照时间先后顺序和相同的时间间隔排列的数据进行建模和预测。在对待时间序列数据时, 我们经常假设过去一段时间收集到的数据精确的刻画了历史, 并且历史会重复自己。时间序列的分析方法不必事先建立主观模型, 而直接根据数据序列本身所计算出来的客观规律进行预测, 这样可以避免预测的主观性, 提高预测的精度和可信度。这些时间序列的预测方法已在天气预报、经济预测、城市用水量预测、大坝变形预测和交通流

量预测等众多领域得到了广泛的应用。

时间序列分析的经典方法是 ARMA 模型。武文俊等研究了用时间序列 ARMA 模型对全球的电离层总电子含量进行了预报,对 10 天左右的预报时间段,时间序列模型的 TEC 计算结果相对精度高,预报相对精度优于 60%的网格点数在总网格点数中所占百分比可达 90%以上^[6]。李志刚、程宗颐等提出对 IGS 提供的全球电离层电子总量用球谐函数进行拟合得到拟合系数的时间序列,再用时间序列分析模型 ARIMA 对拟合系数进行预报,适用于全球的电离层预报,在短期内结果优于对每个网格点上的电子总量所形成的时间序列进行直接预报,且两种方法在 20 天的时间内,预报值与已知值之差小于 3 个 TECU 的点数占总点数的 80%左右^{[7][8]}。A. Krankowski 等用 7 天的 VTEC 数据采用 ARMA 模型进行了 1~3 小时的预测^[9]。

20 世纪 70 年代末发展起来了一种非线性方法:混沌时间序列分析方法。它的任务是揭示具有混沌特征的非线性系统的规律,并解决实际问题。混沌系统的非线性特征主要指的是“对初值的极端不稳定性”^[10]。蒋和荣用相空间重构方法,把电离层参数的时间序列重构成一个 m 维相空间,研究电离层参数的混沌特性及参数的最大可预报时间尺度^[11]。柯璇等指出 TEC 时间序列数据中存在混沌特性,并采用混沌时间序列分析方法进行了预测^[12]。

对于时间序列的预测还可以采用人工神经网络(Artificial Neural Network)的方法。神经网络模型是由大量神经元互相连接而组成的复杂的网络系统,对非线性系统具有很强的模拟能力,可以以前期的时间序列数据训练网络用于预测。在电离层研究领域神经网络已经得到了越来越多的应用。Habarulema 构造了输

入层为时间、点位坐标、太阳活动指数和地磁场指数,输出层为电离层 VTEC 的神经网络模型,利用多个站点的数万个数据进行了训练和预测,得到了很好的效果^[13]。

本文利用 IGS 提供的电离层产品中,提取了不同纬度处多年的 VTEC 数据,进行时间序列特征的分析,并在此基础上采用了上述三种典型的方法:ARMA 模型、神经网络和混沌方法进行了电离层 VTEC 的建模和预测,对这三种方法的应用和结果进行了分析和探讨。

2 电离层时间序列的时频分析

本文所采用的电离层 VTEC 数据来源于 IGS 组织的电离层产品文件^[14]。该文件提供了每隔两小时按照经度变化 5° 和纬度变化 2.5° 构成的 $5^\circ \times 2.5^\circ$ 格网点上的 VTEC 值,其单位为 (0.1 TECU), 1TECU 定义为 10^{16} 电子/平方米。本文提取了纬度 $N40^\circ$ 、经度 $E115^\circ$ 处和纬度 $N22.5^\circ$ 、经度 $E115^\circ$ 处的 2003 年到 2008 年间的 VTEC 时间序列数据,用来进行 VTEC 时间序列的特征分析。

对 $N22.5^\circ$ 、 $E115^\circ$ 处 2003 年~2008 年的时间序列数据(图 1(a))进行傅立叶变换得到的频率-功率图结果显示明显的一日周期和半日周期(图 1(b))。对频率-功率谱图进行放大,可以看到,存在较大的接近 0 频率的功率,这说明存在着长期变化项,比较明显的是 26 天周期和半年周期(图 1(c))。从混沌理论角度看,三个以上的周期存在于系统之中,意味着混沌的非线性特征的产生。多个周期的存在说明电离层 VTEC 时间序列存在着具有混沌系统特性的可能。

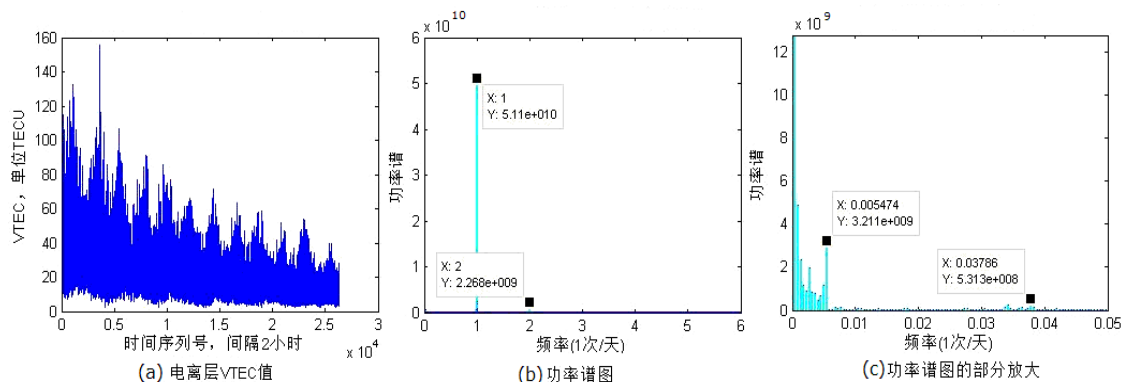


图 1. $N22.5^\circ E115^\circ$ 处 2003 年~2008 年的 VTEC 时间序列及其 FFT 分析

表 1. 傅立叶变换所得到的主要的周期信息

频率	周期	说明	频率	周期	说明
1	1	符合一日周期	0.03786	26.4131	符合 26 天周期
2	0.5	符合半日周期	0.005474	182.6818	符合半年周期

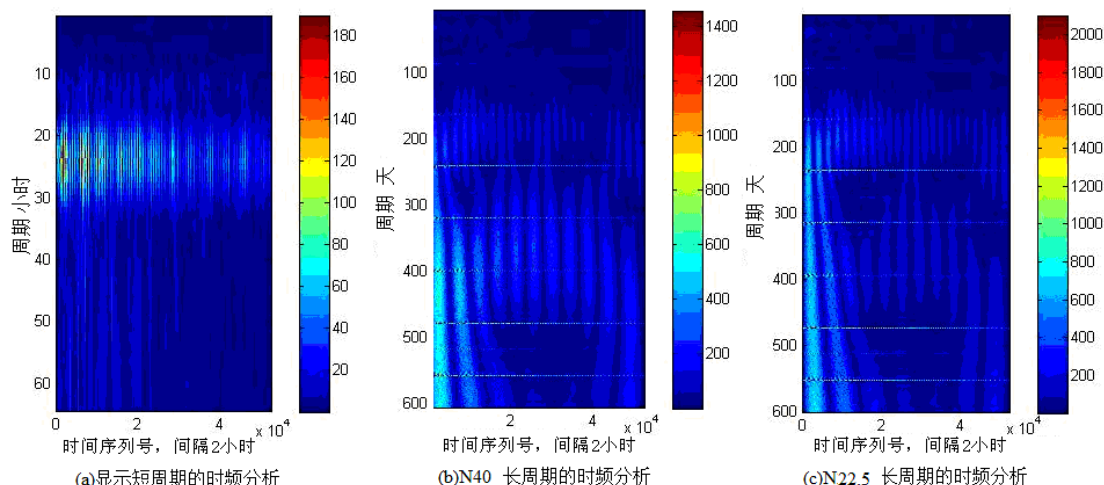


图 2. 利用 Morlet 小波进行时频分析的小波功率谱图

小波分析提供的是时域和频域中具有可变解析度的信号分析方法,利用 Morlet 小波进行时频分析可以看出明显的日周期(图 2(a)),月周期和半年周期和一年周期(图 2(b)、(c))。但是小波分析的结果显示 VTEC 的周期具有时变性。对经度为 E115°, 纬度分别为 N40°(图 2(b))、N22.5°(图 2(c))的两地的 VTEC 小波分析结果进行对比可以看出, N40°处的一年周期更加强烈,而且低纬度处的电离层 VTEC 的功率谱的数值普遍要比中纬度处的高。这些结果都说明虽然时间相同,但是不同纬度处时间序列的特征并不一致。这些区别在进行预测的建模过程中都可能会产生影响。

3 电离层 VTEC 的预测

本文采用了三种时间序列分析的方法对 VTEC 时间序了进行了建模和预测,对预测结果,本文以均方根误差 $E_{RMSE}^{[10]}$ 对不同的预测模型进行比较,定量的反映各个模型的预测性能。设 $\hat{y}(t), (t=1,2,...,S)$ 为期望输出的信号, $y(t), (t=1,2,...,S)$ 为模型预测输出的信号。S 为样本个数。

$$E_{RMSE} = \left\{ \frac{1}{S-1} \sum_{t=1}^S [\hat{y}(t) - y(t)]^2 \right\}^{1/2} \quad (1)$$

在预测分析中,本文采用了 2003 年和 2008 年的数据,由图 3 可知,2003 年的太阳黑子数和地磁活动的 AE 指数均远大于 2008 年,以往的研究均表明,影响电离层活动的主要因素除了地方时和季节因素以外,即为太阳活动和地磁活动因素。采用这两个年份的数据比较具有代表性。

3.1 ARMA 分析方法

自回归移动平均模型 (ARMA) 是一种比较成熟

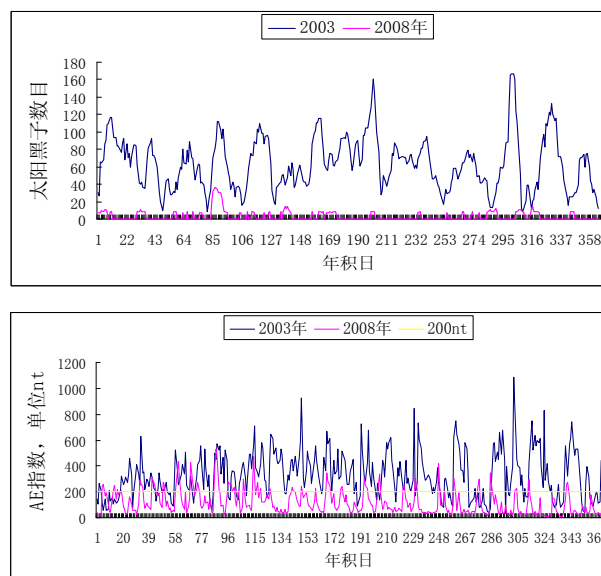


图 3. 2003 年与 2008 年的太阳黑子数与地磁活动 AE 指数对比

的线性时间序列分析模型,适于短期预测。建立模型时它要求时间序列是随机和平稳的,而且需要大量数据。对 VTEC 时间序列进行季节差分或差分,可以得到一个平稳随机序列。ARMA 模型是随机时间序列分析模型的普遍形式:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2)$$

其中, ϕ_i 为自回归 (AR) 系数 ($i=1,2,\dots,p$), p 为自回归阶数; θ_i 为滑动平均 (MA) 系数 ($i=1,2,\dots,q$), q 为滑动平均阶数; ε_i 为零均值正态分布的随机项; Y_t 为经过差分的电离层 VTEC 值。建立 ARMA (p, q) 模型的过程实际上是要确定式 (2) 的模型阶数和系数。q 为 0 时,模型就变成了自回归 AR 模型。

3.2 混沌时间序列分析

混沌时间序列的分析和预测首先要重构相空间，即把具有混沌特性的时间序列重建为一种低阶非线性动力学系统。给定一组时间序列，利用相空间重构方法，将其映射到有限维状态空间中，就可以得到混沌吸引子。混沌吸引子具有总体稳定性、吸引性和内部分形性。处于混沌吸引子外的任一状态点的运动轨迹都有与处于其邻接状态点的运动轨迹相同的运动趋势，进入吸引子。因此，通过找出预测状态点的邻接点与其后续状态点之间的函数关系，作为预测函数，就可以实现混沌的短期预测。

设系统的时间序列为 $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ ，其时间间隔为 Δt 。时间序列的相空间可以表示为：

$$X_i(t) = (x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)), \\ i = 1, 2, \dots, n - m + 1.$$

式中 $\tau = k \cdot \Delta t$ 为时间延迟。 m 为嵌入维数， $X_i(t)$ 为相空间中的一个相点。时间延迟和嵌入维数的确定是相空间重构的基础。利用互信息法和 G-P 方法对 VTEC 时间序列数据进行分析，对 2008 年纬度 N 22.5°、经度 E 115° 处获得的时间延迟和嵌入维数分别是 3 和 7。最大 lyapunov 指数为 0.0230。从这个角度看，电离层 VTEC 时间序列具有混沌特性。

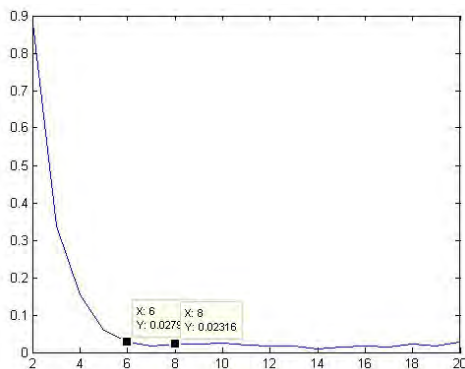


图 4. $\tau = 3$, $m = 2 \sim 20$ 计算的最大 lyapunov 指数

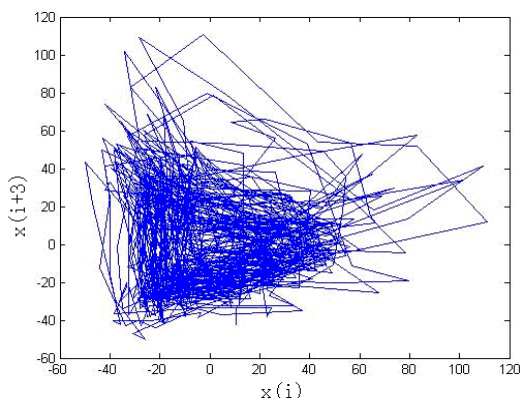


图 5. 重构像空间后的二维相图

重构相空间的过程中，嵌入维数和时间延迟非常重要，图 4 显示了随着嵌入维数的增加，最大 lyapunov 指数在减小，最大 lyapunov 指数体现的是系统的“初值敏感性”，从一定角度上体现了系统的发散性，只有具有较小的重构相空间的 lyapunov 指数，才可能具备较好的预测性。图 5 重构的相空间二维相图可以初步看到混沌吸引子的存在，但是也能看到，噪声对重构后的相空间的影响是很大的。

3.3 神经网络

人工神经网络的“黑箱”特性很适合预测领域的应用需要，它不需要任何经验公式，就能从已有数据中自动地归纳规则，获得这些数据的内在规律，因此即使不清楚预测问题的内部机理，只要有大量的输入、输出样本，经神经网络“黑箱”内部自动调整后，便可建立良好的输入、输出映射模型。在预测领域反向传播（BP）模型的研究更多一些，它由输入层、隐藏层和输出层组成，其工作过程包括信息的正向传播和误差信号的反向传播。在电离层 VTEC 的预测中，输入层为以往的 VTEC 值，输出层为预测的 VTEC 值。

4 预测及分析

4.1 预测结果及比较

采用上述三种方法分别对 2003 年和 2008 年 1 月 1 日至 4 月 18 日的时间段内，纬度 N 22.5°、经度 E 115° 处和纬度 N 40°、经度 E 115° 处时间间隔为 2 小时的 VTEC 时间序列（共 1300 个数据）进行建模，并进行 50 步预测的结果和误差如图 6 所示。预测结果的时间间隔和时间序列的时间间隔一致，50 步预测的时间长度约为 4 天。在建模过程中经过优选所建立的最终的模型的参数，以及采用相应模型进行预测的结果误差统计如表 2 所示。

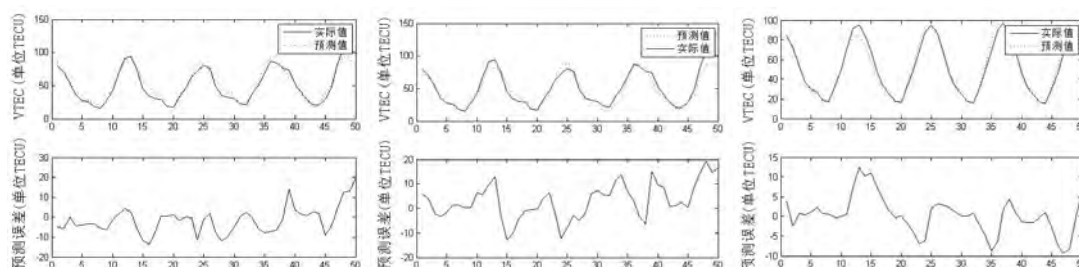
采用 ARMA 模型处理的过程中发现采用差分处理和不采用差分处理的结果相比一般要好。在建模的时候选择简单的 AR 模型，比采用 ARMA 模型所得的 RMSE 结果好。如果阶数偏低会导致预测结果过于平滑，第二天的预测结果和其后的预测结果区别很小。阶数偏大也就意味着建立的预测模型引入了先前过多的数据，建模和预测结果也不好。在 VTEC 出现较大的变化时，用所建立的模型并没有预测出来，但是由于预测值是建立在前面多个数据的基础上的，即使存在这样的异常变化无法探测，除去异常值之外的其他预测结果误差还是较小的。此外，纬度 N 22.5° 处的模型阶数与 N 40° 处的一般不同。

利用混沌时间序列分析方法的基础是非常恰当的系统相空间重构, 嵌入维数的选择存在着很大的经验性和主观性以及计算时间的复杂性等问题。利用相邻相点的变化趋势进行预测对噪声比较敏感。

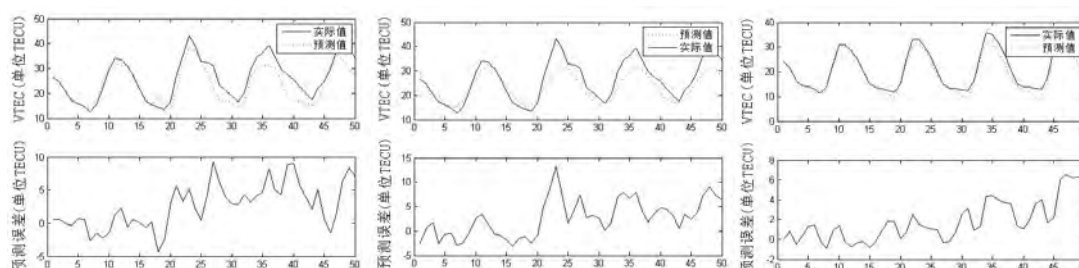
利用神经网络方法进行时间序列的预测难度也在于参数的选择上, 主要包括输入层神经元、隐藏层神经元的个数, 以及隐藏层的个数。多次试验证明, 增加隐藏层的个数, 并不能有效的提高预测的精度, 因此本文采用的模型包含了一个隐藏层。此外对于同一个结构的神经网络, 由于训练的初始权值的随机性,

得到的结果有所不同, 因此参数选择的规律性差, 需要多次训练进行优选。

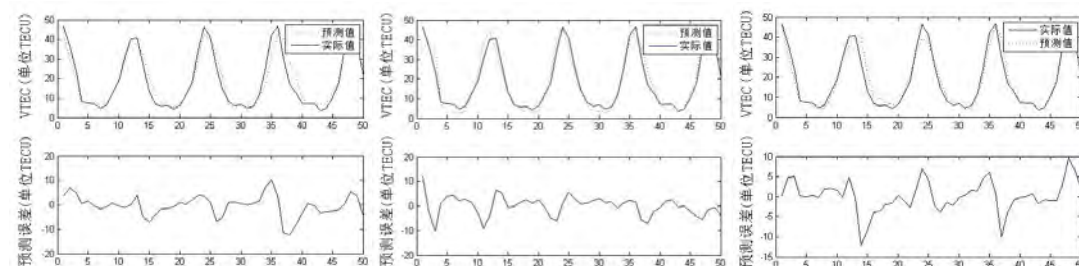
经过不断的优选, 三种方法所建立的模型能够达到比较一致的 RMSE 指标, 但是 ARMA 为了获得较好的结果, 必须采用比较高的模型阶数, 预测中用到了以往的多天的数据, 对于本次试验的 50 步预测来说, 一般是 10 天到 20 天。神经网络模型采用前 1~3 天的数据就可以得到较高的预测精度。基于混沌理论的相空间重构进行预测的方法的预测的精度相比其他的两种方法没有什么优势, 并且计算的复杂度最高。



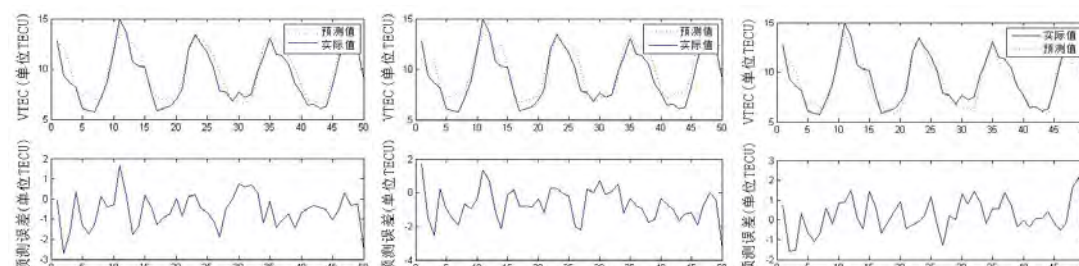
(a) N22.5°处 2003 年 ARMA 方法、相空间重构方法、神经网络方法预测结果



(b) N40°处 2003 年 ARMA 方法、相空间重构方法、神经网络方法预测结果



(c) N22.5°处 2008 年 ARMA 方法、相空间重构方法、神经网络方法预测结果



(d) N40°处 2008 年 ARMA 方法、相空间重构方法、神经网络方法预测结果

图 6. 采用三种方法对不同时间和纬度的 VTEC 值的 50 步预测及误差

表 2. 采用三种方法对不同时间和纬度的 VTEC 的建模与预测误差统计

	纬度	AR 阶数	MA 阶数	预测 RMSE	最大误差	最小误差	平均误差	年份	备注
ARMA	N 22.5 ⁰	231	0	6.8911	20.1661	0.0303	5.1190	2003 年	1 次 差分
		260	0	4.4027	12.2419	0.1165	3.1641	2008 年	
	N 40 ⁰	302	0	4.2920	9.3312	0.0502	3.3478	2003 年	
		140	0	1.0301	2.7007	0.0015	0.7979	2008 年	
	纬度	时间延迟	嵌入维数	预测 RMSE	最大误差	最小误差	平均误差	年份	
相空间 重构	N 22.5 ⁰	2	4	7.9940	19.3918	0.1458	6.1917	2003 年	
		3	7	4.0433	12.0515	0.1050	3.0401	2008 年	
	N 40 ⁰	3	9	4.6951	13.2163	0.1297	3.6784	2003 年	
		3	7	1.2216	3.3000	0.0123	0.9550	2008 年	
	纬度	输入层 节点	隐藏层 节点	预测 RMSE	最大误差	最小误差	平均误差	年份	
神经网络	N 22.5 ⁰	12	12	4.7503	12.4437	0.0221	3.3564	2003 年	1 个 隐藏层
		12	10	3.9875	12.0835	0.0158	2.7307	2008 年	
	N 40 ⁰	12	10	2.7497	6.5988	0.0176	1.9773	2003 年	
		12	12	0.8635	2.1423	0.0273	0.6790	2008 年	

4.2 引入太阳黑子数和地磁活动指数进行 AR 预测

大量的理论与实践表明, 电离层 VTEC 的数值与太阳黑子数、地磁活动、地方时以及季节有关。为了进一步提高预测效果, 本文考虑将太阳黑子数 (SSN) 和地磁活动 AE 指数引入到时间序列的预测中, 采用了多变量 AR 模型进行了分析。

设 $x(t_i)$ 为电离层 VTEC 的时间序列, $SSN(t_i)$ 为太阳黑子数时间序列, $AE(t_i)$ 为地磁活动指数时间序列, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 。构造包含三种信息的向量的时间序列:

$$X(t_i) = [x(t_i) \quad SSN(t_i) \quad AE(t_i)]^T$$

增加了太阳黑子数和地磁活动的 P 阶多变量 AR 模型为:

$$X(t_i) = A(1) \cdot X(t_{i-1}) + A(2) \cdot X(t_{i-2}) + \dots + A(P) \cdot X(t_{i-P}) + \varepsilon(t_i) \quad (3)$$

式中, $A(1), A(2), \dots, A(P) \in R^{3 \times 3}$ 为自回归系数矩阵。 $\varepsilon(t_i)$ 为 $X(t_i)$ 的随机噪声项。

对 2003 年纬度为 N22.5⁰, 经度为 E115⁰ 处的数据进行建模以及一步预测, 结果并没有得到普遍的提高。但是多次试验比较一致的结果是每天的 VTEC 峰值处的 VTEC 预测误差 RMSE 有细微的降低, 而在每天的 VTEC 最低处的时刻的预测误差 RMSE 有所增大, 如图 7 所示。图 8 给出了连续多天的 UT=6 的时刻一步预测的具体预测误差的变化。此外, 加入太阳黑子数

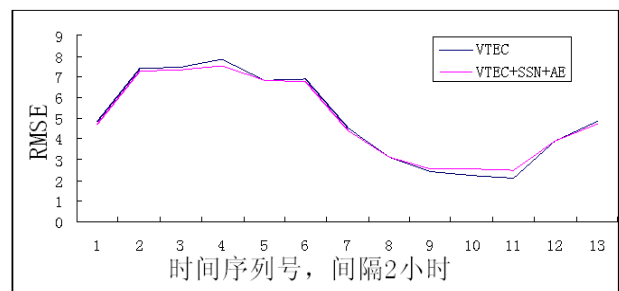


图 7. 不同世界时处的预测误差的 RMSE

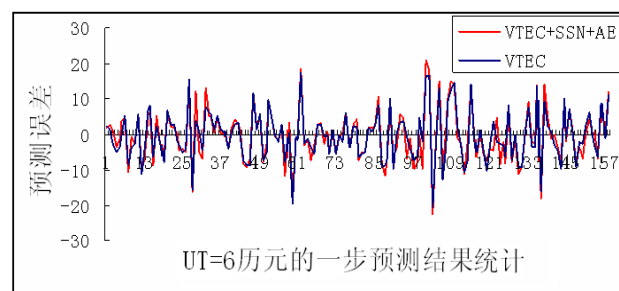


图 8. UT=6 时的一步预测误差统计

和地磁活动的 AE 指数以后进行预测, 可以降低预测模型的阶数。

5 结论

采用 ARMA 模型、相空间重构的方法和神经网络方法对 VTEC 时间序列进行分析和预测, 不需要建立电离层模型, 避免了主观因素的影响。根据电离层 VTEC 时间序列本身, 可以寻找到一定的规律, 从而建立时间序列分析的模型进行预测。

利用 FFT 变换和小波变换可以对电离层 VTEC 的时间序列进行分析, 可以看出时间序列的周期性以及周期性的变化, 对于不同纬度处的数据对比还可以看出, 中纬度地区的一年周期要明显, 而低纬度地区的半年周期要更加明显。多个周期的存在表明电离层时间序列存在混沌的可能。利用相空间重构方法可以看到, 最大 Lyapunov 指数为正, 也证明了混沌特征的存在。不同时间和地点的数据的周期性的差异, 也导致了建立的时间序列预测模型的差异。

采用 ARMA 方法、相空间重构的方法以及神经网络的方法都存在着模型参数的选择问题, ARMA 方法的规律性较强, 而神经网络方法的参数选择导致的结果变化最为随机。

采用 ARMA 模型为了获得较好的结果, 必须采用比较高的模型阶数, 预测中用到了以往的多天的数据。神经网络模型由于可以建立非线性映射关系, 采用少量的以往的数据, 经过训练和优选就可以得到较高的预测精度。

基于混沌理论的相空间重构进行预测的方法, 计算最为复杂。目前的相空间重构的参数的选择还存在着很大的经验性。并且从原理和结果上都表明, 观测值如果存在噪声, 对于这种方法的影响最大。混沌预测的精度相比其他的两种方法没有什么优势, 但是进一步应用混沌理论研究电离层的动力学机制还有很大的前景。

太阳黑子数与地磁活动指数的时间序列引入到电离层 VTEC 的预测上来, 采用 AR 模型进行预测结果导致每天的 VTEC 峰值处的预测误差 RMSE 有细微的降低, 而在每天的 VTEC 最低处的时刻的预测误差 RMSE 有细微的增大。这一方面的工作还可以作进一步的研究。

References (参考文献)

- [1] Yuan Yunbin, Ou Jikun, Ionospheric Model of Generalized Trigonometric Series Function[J]. *Progress in Natural Science*, 2005, 15(8), P1015-1019(Ch).
袁运斌, 欧吉坤, 广义三角级数函数电离层延迟模型[J], 自然科学进展, 2005, 15(8), P1015-1019.
- [2] Yuan Yunbin, Ou Jikun, Research on Ionospheric Delay and Rules of Electron Concentration Change Using GPS[J]. *Global Positioning System*. 2001, 26(1), P19-21(Ch).
袁运斌, 欧吉坤, 利用 GPS 研究电离层延迟及电子浓度变化规律[J], 全球定位系统, 2001, 26(1), P19-21.
- [3] Zhang Hongping, Ping Jinsong, Zhu Wenyao, Brief Review of the Ionospheric Delay Models[J]. *Progress in Astronomy*, 2006, 24(1), P18-28(Ch).
章红平, 平劲松, 朱文耀, 电离层延迟改正模型综述[J], 天文学进展, 2006, 24(1), P18-28.
- [4] Xiao Zuo, Zhang Donghe, An Approach to Study The Day-to-Day Variations of Ionospheric TEC Directly by GPS Time-Delay Signals[J]. *Chinese Journal of Space Science*. 2000, 20(2), P97~102(Ch).
萧佐, 张东和. 通过 GPS 测量数据研究电离层电子总含量的逐日变化. *空间科学学报*, 2000, 20(2), P97~102.
- [5] Liu Jingbin, Wang Zemin, Zhang Hongping, Zhu Wenyao, Comparison and Consistency Research of Regional Ionospheric TEC Models Based on GPS Measurements[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2008, 33(5), P479-483(Ch).
柳景斌, 王泽民, 章红平等, 几种地基 GPS 区域电离层 TEC 建模方法的比较及其一致性研究[J], 武汉大学学报. 信息科学版, 2008, 33(5), P479-483.
- [6] Wu Wenjun, Li Zhigang, Yang Xuhai, Cheng Zongyi, Wang Xiaohan, Predicting Ionospheric TEC with Time Series Model[J]. *Journal of Time and Frequency*, 2008, 31(2), P141-146(Ch).
武文俊, 李志刚, 杨旭海, 程宗颐, 王晓晗, 利用时间序列模型预报电离层 TEC[J], 时间频率学报, 2008, 31(2), P141-146.
- [7] Li Zhigang, Li Weichao, Cheng Zongyi, Feng Chugang, Direct and Indirect Methods on Predicting Ionosphere and Their Compare[J]. *ACTA Astronomic Sinica*, 2008, 49(1), P29-45(Ch).
李志刚, 李伟超, 程宗颐, 冯初刚, 电离层 TEC 预报的直接法和间接法及其比较[J], 天文学报, 2008, 49(1), P29-45.
- [8] Li Zhigang, Cheng Zongyi, Feng Chugang, et al. A study of prediction models for ionosphere[J]. *Chinese J. Geophys.* 2007, 50(2), P327~337(Ch).
李志刚, 程宗颐, 冯初刚, 电离层预报模型研究. *地球物理学报*[J], 2007, 50(2), P327~337.
- [9] A Krankowskia, W Kosekb, L W Barana, W Popinskic. Wavelet analysis and forecasting of VTEC obtained with GPS observations over European latitudes. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. 2005, 67, P1147 - 1156
- [10] Han Min. *Chaos Time Series Prediction :Theory and Method*[M]. Beijing: China WaterPower Press, 2007.
韩敏. 混沌时间序列预测理论与方法. 中国水利水电出版社, 2007 年
- [11] Jiang Herong, Yang Zengyu, Yang Meihua. Chaotic Characteristics of the Ionospheric Parameters and the Predictable Time Scale[J]. *Chinese Journal of Space Science*, 1994, 14(3), P221~226(Ch).
蒋和荣, 杨征宇, 杨美华, 电离层参数的混沌特性及可预报的时间尺度[J], 空间科学学报, 1994, 14(3), P221~226.
- [12] Ke Xuan, Wan Weixing, Ning Baiqi, Analysis of chaotic properties and nonlinear prediction of ionospheric total electron content over 120° E magnetism equator[J]. *Chinese J. Geophys.* 2006, 49 (5), P1243~1249(Ch).
柯璇, 万卫星, 宁百齐, 120° E 磁赤道上空电离层电子浓度总含量的混沌特性分析及非线性预测初探[J], 地球物理学报, 2006, 49(5), P1243~1249.
- [13] Habarulema J B, McKinnell L A, Opperman B D L. Towards a GPS-based TEC prediction model for Southern Africa with feed forward networks[J]. *Advances in Space Research*. 2009, 44, P82-92.