

# Modeling Regional Ionosphere by Adjusted Spherical Harmonic Analysis

AN Jiachun<sup>1,2</sup>, WANG Zemin<sup>1,2</sup>, DU Yujun<sup>1,2</sup>

*1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan, China*

*2 Chinese Antarctic Center of Surveying and Mapping, Wuhan, China*

*e-mail: jc\_an@qq.com*

**Abstract:** SCHA(Spherical Cap Harmonic Analysis) was first used in Geophysics by Haines in 1985. Then scholars both here and abroad studied geomagnetic field and gravitational field with this method. In China, Liu(2008) first used SCHA to model regional ionosphere and obtained better results. But SCHA need to calculate the non-integer degree of Legendre function, so the amount of calculation is larger and it is not convenient for actual application. In the paper, under the maintenance of precision, improve SCHA to ASHA(Adjusted Spherical Harmonic Analysis). The main idea of ASHA is to extend the colatitude to semi-sphere, so that the non-integer Legendre function is substituted by integer ones, accordingly the calculation is simpler. At last, model the ionosphere over China with ASHA, and the result shows that the method can maintain comparable precision when the spherical cap half angle is less 20 degree.

**Keywords:** GPS; regional ionosphere model; SCHA; ASHA

## 利用改进的球谐分析建立区域电离层模型

安家春<sup>1,2</sup>, 王泽民<sup>1,2</sup>, 杜玉军<sup>1,2</sup>

*1 武汉大学测绘学院, 武汉, 430079*

*2 中国南极测绘研究中心, 武汉, 430079*

*1 e-mail: jc\_an@qq.com*

**摘要:** 球冠谐分析(SCHA)由 Haines(1985)首先引入到地球物理学领域, 之后国内外学者进行了大量相关研究, 主要应用在地磁场和重力场模型当中。柳景斌(2008)在国内率先将球冠谐分析应用于建立区域电离层模型, 并取得了较好的结果。但球冠谐分析需要按边界条件反求非整阶勒让德函数的阶数, 计算量非常繁重, 不便于实际应用。本文采用改进的球谐分析(ASHA), 在保持相当精度的前提下, 对球冠谐函数作必要的改进, 以简化运算。ASHA 的主要思想是把球冠余纬的定义域扩展到整个半球上, 以使用整阶 Legendre 函数代替非整阶 Legendre 函数, 从而达到简化运算的目的。最后用中国区域的 GPS 数据建立区域电离层模型, 结果表明, 在球冠半角小于 20 度时, ASHA 仍能保持相当的精度。

**关键词:** GPS; 区域电离层模型; 球冠谐分析; 改进的球谐分析

### 1 引言

电离层延迟是 GPS 测量中最严重的误差源之一, 精确求定电离层延迟是高精度定位的必然要求。同时, 电离层延迟的空间分布也是研究电离层物理的重要手段<sup>[3]</sup>。实现这一要求的最关键的因素就是电离层延迟模型的选择, 一般是通过单基准站或区域多基准站网的高精度双频 GPS 数据, 利用单层模型来提取区域电离层延迟信息。国内外学者对此进行了卓有成效的研究, 常用的区域电离层模型有多项式模型、三角级数模型、低阶球模型、广义三角级数模型、球冠谐模型等<sup>[5]</sup>。但每个模型都各有优缺点。

球冠谐模型由于基函数在球冠上正交, 其模型参数有较强的物理意义<sup>[6]</sup>, 但是其非整阶的求解及非整

阶勒让德函数的构造较为复杂。本文采用改进的球谐模型 (Adjusted Spherical Harmonic Analysis), 在保持相当精度的前提下, 对球冠谐分析 (Spherical Cap Harmonic Analysis) 做必要的改进, 以简化运算, 提高效率。ASHA 的主要思想是将余纬的定义域扩展到整个半球上, 以使用整阶勒让德函数代替非整阶勒让德函数。最后通过实测数据验证了 ASHA 的效果。

### 2 电离层模型的建立

所谓电离层, 是上层大气的一部分, 其特点是电子含量多到足以改变电磁波的传播, 范围在距离地面 50km~2000km 处。通常在 350km~450km 的范围内, 电离层中的自由电子密度达到最大。在应用 GPS 研究

电离层中，通常引入单层模型来代替整个电离层，即假设所有的自由电子都集中在某一高度处的一个无限薄球面上。

### 2.1 投影函数的选择

假设电离层薄层高度为  $H$ ，地球平均半径为  $R$ ，卫星和地面接收机的传播路径与电离层薄层的交点叫电离层穿刺点(Ionospheric Pierce Point, IPP)，在接收机处的卫星天顶距为  $Z$ 。

由于计算的是穿刺点处的 VTEC 值，还需要计算穿刺点处的天顶距  $z'$ ，如下，

$$z' = \arcsin\left(\frac{R}{R+H} \times \sin z\right) \quad (1)$$

借助于电离层投影函数  $mf$  可实现倾斜路径上的电离层延迟到单层模型垂直方向上延迟之间的转换，从而实现倾斜观测量到电离层模型参数化。一般将  $mf$  视为卫星高度角的函数，定义为斜距电离层延迟与垂直电离层延迟的比值。

最为简便的是三角函数型 SLM 投影函数：

$$mf(z') = 1/\cos(z') \quad (2)$$

通常分别取 SLM 单层的高度  $H$  为 350 公里、400 公里、450 公里。分析 SLM 投影函数可发现，在观测高度角大于 15~20 度时，各类投影函数计算的效果并无大的差异<sup>[6]</sup>。

### 2.2 区域电离层模型

常用的区域电离层模型有多项式模型、三角级数模型、低阶球模型等。国内有学者还发展了广义三角级数模型（袁运斌，2005）、球冠谱模型（柳景斌，2008）等。这些模型的建立一般是在太阳方向固定的地磁或地固坐标系中进行，并假定电离层延迟是静止的，采用数学拟合的方法求解参数。

本文介绍的改进的球谱分析（ASHA），是在球冠谱分析的基础上进行了部分改进，其结果将与球冠谱的结果进行比较。

### 3 ASHA 思想

在球冠谱分析中，需要求解缔合勒让德函数的非整阶数，计算量繁重，不便于实际应用。本文采用改进的球谱模型，在保持相当精度的前提下，对球冠谱分析做必要的改进，以简化运算，提高效率。ASHA 的主要思想是将余纬的定义域扩展到整个半球上，以使用整阶勒让德函数代替非整阶勒让德函数。

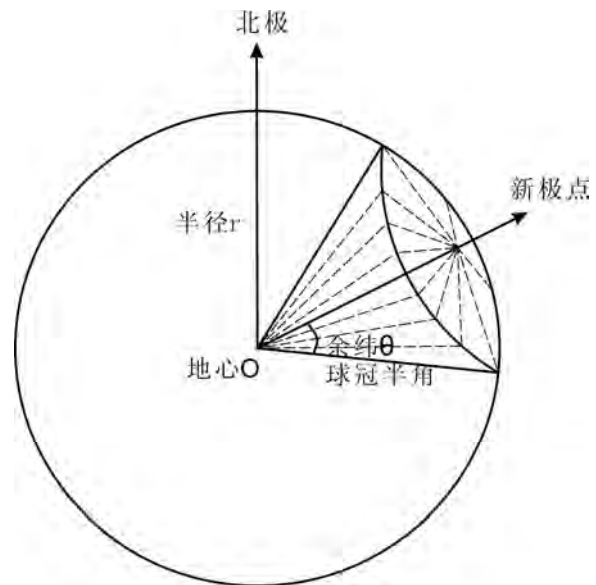


Figure 1. Spherical cap sketch

图 1. 球冠示意图

### 3.1 原理

其主要思想是把余纬的定义域  $(0, \theta)$  映射到  $(0, \pi/2)$  上，以使用整阶勒让德函数代替非整阶勒让德函数，从而达到简化运算的目的。如图 1 所示。

下面讨论如何把从半角为  $\theta_0$  球冠坐标系  $(r, \theta, \lambda)$  转化到半角为  $\pi/2$  的球冠坐标系  $(r', \theta', \lambda')$  中去。有如下关系：

$$\begin{cases} r' = r \\ \theta' = s \cdot \theta = (\pi/2\theta_0) \cdot \theta \\ \lambda' = \lambda \end{cases} \quad (3)$$

具体的转化方法从勒让德方程入手

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P = 0 \quad (4)$$

上式中的  $P$  是该方程的解，即勒让德函数  $P_n^m(\theta)$ 。

如果球冠半角不太大，可以认为  $\sin \theta \approx \theta$ ，当  $\theta \leq 14^\circ$  时，近似程度优于 99%，当  $\theta \leq 20^\circ$  时，近似程度优于 98%。所以上式可变化为：

$$\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{\theta^2} \right) P = 0 \quad (5)$$

继续求导可得：

$$\frac{d^2 P}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{dP}{d\theta} + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{\theta^2} \right) P = 0 \quad (6)$$

所以式 (6) 是勒让德方程的近似形式。

同时，由式 (3) 可得：

$$\begin{cases} \frac{dP(\theta)}{d\theta} = s \cdot \frac{dP(\theta')}{d\theta'} \\ \frac{d^2P(\theta)}{d\theta^2} = s^2 \cdot \frac{d^2P(\theta')}{d\theta'^2} \\ \frac{d\theta'}{d\theta} = s \end{cases} \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (6) 得：

$$\frac{d^2P}{d\theta'^2} + \frac{1}{\theta'} \frac{dP}{d\theta'} + \left( \frac{n(n+1)}{s^2} - \frac{m^2}{\theta'^2} \right) P = 0 \quad (8)$$

在式 (8) 中，令

$$\frac{n(n+1)}{s^2} = k(k+1)$$

可见，式 (8) 和式 (6) 是完全类似的。

下面求解：

$$k(k+1) = n(n+1)/s^2 \quad (9)$$

由于  $\theta'$  的取值范围是  $(0, \pi/2)$ ，式 (9) 中的假设并非总是成立的，但我们有理由相信  $P_k^m(\theta)$  仍然是式 (8) 的解。本文定义  $k=0,1,2,\dots$ ，则  $n$  必须取实数，后面将以  $n_k$  来表示， $n_k$  同  $k$  相关：

$$n_k = \sqrt{s^2 k(k+1) + 0.25} - 0.5 \quad (10)$$

当  $\theta' = 6^\circ, m=0$  时， $n_k$  按球冠谱分析和式 (10) 计算的值还是非常接近的，如表 1 所示。这说明在式 (9) 中引入的变量  $k$ ，与球冠谱分析中的变量  $k$ ，是一致的，二者间的细小差别主要源于把式 (4) 转化到式 (5) 时的近似。

Table 1. The difference of ASHA and SCHA of  $n_k$   
表 1. ASHA 和 SCHA 计算的  $n_k$  的差别

$k$	$n_k$ (ASHA)	$n_k$ (SCHA)	差别(%)
0	0	0	0
1	20.7	22.5	7.8
2	36.2	36.1	0.4
3	51.5	52.2	1.4
4	66.1	66.5	0.0
5	82.1	82.1	0.6
6	96.7	96.7	0.0
7	112.1	112.1	0.0

### 3.2 正规化整阶勒让德函数

下面为了论述方便，我们用  $\theta$ ，而不是  $\theta'$ ，来表示 ASHA 的球冠半角。

根据前一节的论述我们知道，当球冠的半角  $\theta \leq 20^\circ$  时，用 ASHA 技术把球冠域映射到半球域上，实现整阶勒让德函数代替非整阶勒让德函数后仍能保持相当的精度。

设  $x = \cos \theta$ ，则：

$$P_k^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-m}{2} \rfloor} (-1)^s \frac{(2k-2s)!}{2^k s!(k-s)!(k-2s-m)!} x^{k-2s-m} \quad (11)$$

而关于  $\theta$  的边界条件要满足正则性，即：

$$\frac{dP_k^m(\cos \theta_0)}{d\theta} = 0 \quad (12)$$

$$P_k^m(\cos \theta_0) = 0 \quad (13)$$

当  $\theta_0 = \pi$  时，自动满足边界条件，但当  $\theta_0 \neq \pi$  时，式 (12) 和式 (13) 不可能同时为零 (MacRobert, 1967)。当  $k-m$  是偶数时，式 (12) 满足 Nernann 边界条件，当  $k-m$  是奇数时，式 (13) 满足 Dirichlet 边界条件。

为了计算的简便，需要正规化整阶勒让德函数。正规化的原则是使面球函数在单位球上的平均值等于 1，即：

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} (\tilde{P}_k^m(\cos \theta) \cos(m\lambda))^2 d\omega = 1, k \geq 0 \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} (\tilde{P}_k^m(\cos \theta) \sin(m\lambda))^2 d\omega = 1, k > 0 \end{cases} \quad (14)$$

由此得  $\tilde{P}_k^m(\cos \theta)$  与  $P_k^m(\cos \theta)$  的关系为

$$\tilde{P}_k^m(\cos \theta) = \left( \frac{2}{1-\delta(m)} (2k+1) \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_k^m(\cos \theta) \quad (15)$$

其中， $\delta(m) = \begin{cases} 1, m=0 \\ 0, m \neq 0 \end{cases}$

所以， $\tilde{P}_k^m(\cos \theta)$  在  $k-m$  同时为奇数或同时为偶数时于  $\theta \in [0, 90^\circ]$  是正交的，但是，不同时为奇数或偶数时，基函数没有正交性。

### 3.3 坐标转换

通常 GPS 电离层 TEC 观测值表示在地理或地磁

坐标系下，建立区域电离层 TEC 的球冠谐模型时，先以球冠新极点建立球冠坐标系，然后将电离层 TEC 观测值转化到球冠坐标系下，为此需要进行坐标转换。

任一点在北极地心坐标系下的球面地心坐标为  $(\varphi_o, \lambda_o)$ ，则其在新极点  $(\varphi_c, \lambda_c)$  的球冠坐标系下的球面地心坐标  $(\varphi, \lambda)$  为 (Allredge,1981)

$$\begin{cases} \varphi = \arcsin(\sin \varphi_c \sin \varphi_o + \cos \varphi_c \cos \varphi_o \cos(\lambda_o - \lambda_c)) \\ \lambda = \arcsin\left(\frac{\sin(\lambda_o - \lambda_c)}{\cos \varphi} \cos \varphi_o\right) \end{cases} \quad (16)$$

要注意的是，

1.  $\varphi$  是纬度，若是用余纬表示则  $\theta = 90^\circ - \varphi$

2.  $\varphi$  是地心坐标的纬度，大地纬度  $B$  和地心纬度  $\varphi$  的关系是  $\tan \varphi = (1 - e^2) \tan B$

综上所述，球冠域中的 TEC 可展开为

$$E(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \sum_{m=0}^k \tilde{P}_k^m(\cos \theta) (\tilde{C}_k^m \cos(m\lambda) + \tilde{S}_k^m \sin(m\lambda)) \quad (17)$$

#### 4 数据处理的方法

数据处理包括两部分，第一部分是解算穿刺点实测值，第二部分是建立 ASHA 模型。

##### 4.1 利用平滑的伪距差分解算穿刺点 VTEC

利用双频伪距观测值：

$$\begin{cases} \rho = \rho'_1 - 40.28 \times TEC / f_1^2 + B_1^S + B_1^R \\ \rho = \rho'_2 - 40.28 \times TEC / f_2^2 + B_2^S + B_2^R \end{cases} \quad (18)$$

其中  $\rho'_1$ 、 $\rho'_2$  是实测伪距观测值， $B_1^S$ 、 $B_1^R$ 、 $B_2^S$ 、 $B_2^R$  分别是两个频率上的卫星和接收机的仪器偏差。

对两式求差，可以得到 TEC 基本计算式：

$$\begin{aligned} &(\rho'_2 - \rho'_1) + (B_2^S - B_1^S) + (B_2^R - B_1^R) \\ &= 40.28 \times TEC * (1/f_2^2 - 1/f_1^2) \end{aligned} \quad (19)$$

进一步简化得，

$$\Delta \rho = -0.105 \times TEC + \Delta B^S + \Delta B^R$$

这里， $\Delta B^S$  是卫星的硬件延迟， $\Delta B^R$  是接收机的硬件延迟，当然，也有文献不对它加以严格区分，统称为硬件延迟，并合并解算，本文为了详细分析硬件延迟的特性，所以分别设了参数。

同样，双频载波相位观测也有类似的方程，只是多了未知的整周模糊度，虽然利用载波相位观测方程只能求得相对 TEC，但是可以用来精化伪距观测方程。因为伪距差分的精度较低，约为 0.4m 左右，常用的平滑该观测量的方法有 Kalman 滤波、相位平滑伪距、模糊度参数估计等，本文采用的是 Kalman 滤波的方法。

#### 4.2 ASHA 模型的建立

首先是选定所分析区域的球冠极点位置及球冠的大小。本文所选的范围是中国区域，球冠极点是测站坐标的中心点。

其次是确定阶数和次数。这里需要说明的是，更多的参数设置，它们的显著性不强，且容易引起法方程秩亏。设阶数是  $k_{\max}$ ，次数是  $m_{\max}$ ，则一组 ASHA 方程的待求系数是：

$$N = (k_{\max} + 1)^2 - (k_{\max} - m_{\max})(k_{\max} - m_{\max} + 1)$$

本文选择的阶数是 8，次数是 6，所以一组 ASHA 方程的待求系数是 75。

然后是建立球冠坐标系，并对观测数据进行坐标转换。

最后，将一天 24 小时按 2 小时为间隔分成 12 个时段，这 12 个时段的参数按时间先后顺序排列设置成一个待估向量，而接收机和卫星的硬件延迟按全天来设置参数。按法方程叠加的方式，分别读入全天的电离层 VTEC 数据，形成法方程，并采用最小二乘参数估计的方法，统一解算各测站、卫星的硬件延迟，以及各个时段相应的多项式模型。

由于将测站、卫星的硬件延迟分别设置成参数，采用最小二乘进行估计，此时法方程系数矩阵容易秩亏，因此引入各卫星硬件延迟之和为 0 的约束条件。

同时由于各时段间的函数容易出现时空上的不连续，所以加入了时段节点处函数值及其偏导数均相等的约束条件。

#### 5 结果分析

本文采用的 GPS 数据主要来自中国地壳运动 GPS 监测网，2008 年 5 月 1 日的 27 个站。所用的站点分布见图 2。

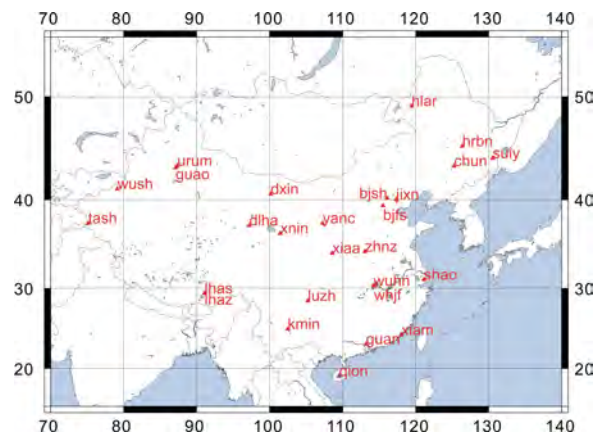


Figure 2. Distributed stations over China

图 2. 中国区分布的站点

### 5.1 硬件延迟的估计

为了精确的求解 TEC 的变化, 必须要将硬件延迟剔除, 本文按照前面所述的方法先求解硬件延迟, 剔除硬件延迟后再用相应的模型求解 TEC。

下面的表 2 给出的是各 IGS 站用 ASHA 方法求解出的接收机硬件延迟和 IGS 官方公布的结果的比较, 图 3 给出的是用 ASHA 方法求解出的卫星硬件延迟和 IGS 站官方公布的结果的比较。

表 2 是中国区内的 5 个 IGS 站的接收机硬件延迟的结果比较, 其中的数值单位都是 ns。从表 2 中我们可以看出, 类似于文献 5 中对于中国区域的 IGS 站硬件延迟的计算结果, 这里用 ASHA 方法计算的接收机硬件延迟也是小于官方公布的结果约 1 个 ns, 因为 IGS 官方公布的结果是各分析中心加权平均的结果, 可以认为是准确的, 所以将其他的接收机硬件延迟都加上 1 个 ns, 作为真实的接收机硬件延迟。而这个 1ns 的差值可能是处理方法上的区别产生的, 如在区域的模型中, 并不是所有卫星都可视, 约束条件是所有可视卫星的硬件延迟之和为 0, 不同于官方的约束条件是所有卫星的硬件延迟之和为 0, 这可能会导致部分卫星硬件延迟引入接收机硬件延迟。

图 3 是卫星硬件延迟的结果比较, 其中黄线是 IGS 官方公布的结果, 蓝点是用 ASHA 方法计算的结果,

Table 2. The receivers DCBs calculated are compared with IGS solutions

表 2. 求解的接收机硬件延迟和 IGS 官方的比较

Site	ASHA	IGS
bjfs	-3.510	-2.950
lhaz	-6.563	-5.309
shao	-5.677	-4.795
urum	2.244	3.256
wuhn	-3.958	-3.128

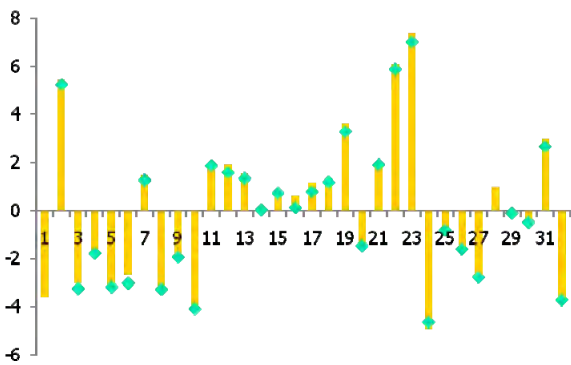


Figure 3. The satellites DCBs calculated are compared with IGS solutions

图 3. 求解的卫星硬件延迟和 IGS 官方的比较

横轴是卫星编号, 纵轴是硬件延迟的数值, 单位是 ns。从图 3 中我们可以看出, 用 ASHA 方法计算的卫星硬件延迟和官方公布的结果较为接近, 但是这里要指出的是, 官方的结果的约束条件是所有卫星的硬件延迟之和为 0, 而本文的约束条件是所有可视卫星的硬件延迟之和为 0, 这也是结果仍有差别的主要原因。

### 5.2 不同参数的结果分析

在正确修正了接收机和卫星的硬件延迟之后, 为了比较 ASHA 方法的精度, 同时用 SCHA 方法计算了同样的数据。表 2 给出了两种方法在不同参数下的残差的平均值和方差。

从表 3 可以看出, 当  $\theta \leq 20^\circ$  时, 用 ASHA 方法建立的区域电离层模型与 SCHA 模型的精度相当, 其均值和方差均在较小的范围内。均值较小说明没有系统误差, 方差较小说明精度较高。但当  $\theta \leq 30^\circ$  时, ASHA 方法所得的结果的精度立刻下降, 这也和之前的理论分析相吻合, 因为  $\sin \theta \approx \theta$  的假设的精度随着  $\theta$  的变大迅速下降。同时还要指出的是, 本文选择的每组模型参数是 75 个, 如果选取更多的参数, 精度没有改善, 反而容易秩亏。

### 5.3 一天内的 TEC 值变化

为了观察一天内 TEC 值的变化, 当选择  $\theta \leq 20^\circ$  时, 图 4 给出中心点 (34N, 108E) 处的 TEC 变化曲线。

Table 3. The difference of ASHA and SCHA of mean and rms

表 3. ASHA 和 SCHA 计算的均值和方差的差别

	$\theta \leq 14^\circ$ 时		$\theta \leq 20^\circ$ 时		$\theta \leq 30^\circ$ 时	
	均值	方差	均值	方差	均值	方差
ASHA	0.022	3.849	0.031	4.023	0.101	8.013
SCHA					0.021	3.802

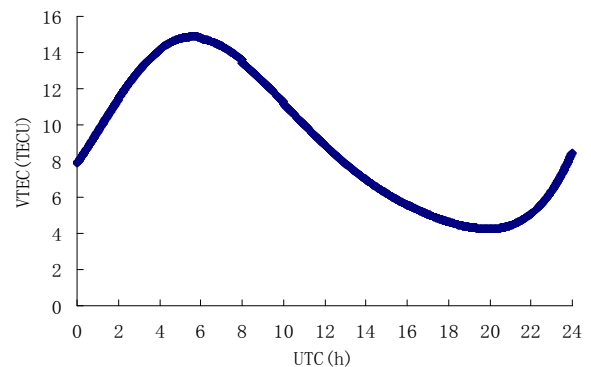


Figure 4. TEC sketch in center point

图 4. 中心点的 TEC 图

从图 3 可见, ASHA 方法较好的反映了一天内的 TEC 的变化。这也说明了 ASHA 方法在建立区域电离层模型上是有效的。

## 6 结论

本文介绍了改进的球谐分析的原理并进行了实例验证。结果表明, 当球冠谐模型的球冠角较小时, 球冠谐模型和 ASHA 模型拟合的精度相差不多, 此时应用中可以选择 ASHA 模型进行计算。同时, 用 ASHA 模型能够避免计算非整阶勒让德函数的非整阶数, 省去很多复杂而又繁琐的计算。

## 致 谢

感谢武汉大学的章红平副教授提供的 GPS 观测数据及数据处理指导。

## References (参考文献)

- [1] Haines, G. V., Spherical Cap Harmonic Analysis, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 90, No. B3, 28 February 1985, pp. 2583–91.
- [2] Schaer S. Mapping and Predicting the Earth's Ionospheric using the global positioning system. PhD Dissertation. Switzerland: Astronomical Institute of the University of Bern, 1999.
- [3] DeSantis, A., Conventional Spherical Harmonic Analysis for Regional Modeling of the Geomagnetic Field, *Geophysical Research Letters*, Vol. 19, No. 10, 22 May 1992, pp. 1065–67.
- [4] M. Bakry El-Arini., Comparison of Real-Time Ionospheric Algorithms for a GPS Wide-Area Augmentation System, *Journal of the Institute of Navigation*, Vol. 41, No. 4, Winter 1994–1995.
- [5] Li Jiancheng. Spectrum Method of Geophysics. PhD. Wuhan Technology University of Surveying and Mapping, 1993. 李建成. 物理大地测量中的谱方法. 博士学位论文, 武汉测绘科技大学, 1993.
- [6] Zhang Hongping. Monitoring and Correcting the Ionosphere over China Based on Groud GPS. Shanghai Astronomical Observatory of Chinese Academy of Sciences, 2006. 章红平. 基于地基 GPS 的中国区域电离层监测与延迟改正研究. 博士学位论文, 中国科学院上海天文台, 2006 年.
- [7] Yuan Yunbin. Study on Theories and Methods of Correcting Ionospheric Delay and Monitoring Ionosphere Based on GPS. Institute of Geodesy and Geophysics of Chinese Academy of Sciences, 2006. 袁运斌. 基于 GPS 的电离层监测及延迟改正理论与方法的研究. 博士学位论文, 中国科学院测量与地球物理研究所, 2002 年.
- [8] Liu Jingbin, Wang Zemin et. al., Modeling Regional Ionosphere Using GPS Measurements over China by Spherical Cap Analysis Methodology. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*. Aug. 2008. Vol. 33 No. 8. 柳景斌, 王泽民等. 利用球冠谐分析方法和 GPS 数据建立中国区域电离层 TEC 模型. *武汉大学学报 (信息科学版)*. 2008 年 8 月, 第 33 卷, 第 8 期.
- [9] Cao Yueling, Wang Jiexian. Application of Spherical Cap Harmonic Analysis to Fit GPS Level Height. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*. May 2008. Vol. 33 No. 5. 曹月玲, 王解先. 利用球冠谐分析拟合 GPS 水准高程. *武汉大学学报 (信息科学版)*. 2008 年 5 月, 第 33 卷, 第 5 期.
- [10] Guo Junyi. The Foudation of Geophysics. Surveying Press, 2001. 郭俊义. 地球物理学基础. 测绘出版社, 2001.