

Robust Prediction Algorithm for GPS Satellite Clock Error Combining Clock's Physical Character and ARIMA Model

HUANG Guanwen¹, YANG Yuanxi², ZHANG Qin¹

¹College of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China

²Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, Shaanxi, China

e-mail: huang830928@yahoo.com.cn; yuanxi@pub.xaonline.com; zhangqinle@263.net.cn

Abstract: The autonomous navigation of Global Navigation Satellite System (GNSS) needs long-term and real-time satellite clock error prediction. However, most of the algorithms on the satellite clock error prediction are focused on short-term and real-time or long-time post forecasting, which are difficult to meet the requirements of real-time clock error prediction for long-term satellite autonomous navigation with high-precision. This paper proposes a robust quadratic polynomial model to fit single-day clock error to mitigate the effect of exceptional data firstly based on the properties of clock velocity and shift. Then the long-term clock parameters are predicted based on the time series of clock parameters fitted from former clock errors and the ARIMA model. This kind of algorithm is tested by actual GPS data to predict 100 days clock errors, and the prediction accuracy is better than 34ns, which is significantly better than other current prediction algorithms.

Keywords: clock error model; long-term prediction; ARIMA; robust estimation

基于钟差物理特性和 ARIMA 模型的 GPS 卫星钟差抗差预报算法

黄观文¹, 杨元喜², 张勤¹

¹长安大学 地质工程与测绘学院, 西安 中国 710054

²西安测绘研究所, 西安 中国 710054

e-mail: huang830928@yahoo.com.cn; yuanxi@pub.xaonline.com; zhangqinle@263.net.cn

摘要: 利用全球导航卫星定位系统实现自主导航需要实时长期进行钟差预报, 而目前的钟差预报研究大部分集中在实时短期预报或事后长期预报方面, 很难满足长时间卫星自主导航的高精度实时钟差预报要求。针对这个问题, 本文结合星钟自身的钟速、钟漂等物理特性, 同时为抵制异常数据对拟合模型的污染, 构造抗差二次多项式模型进行单天钟差拟合; 利用拟合得到的星钟参数时间序列揭示其长期变化特征, 并结合 ARIMA 模型对星钟参数进行长期预报。算例中, 利用新算法预报 100 天的钟差数据, 其预报精度优于 34ns, 显著优于其他常规算法。

关键词: 钟差模型; 长期预报; 求和自回归滑动平均模型; 抗差估计

1 引言

高精度的卫星钟是导航系统的基础, 如何对卫星钟差进行实时估计和预报已成为开展时间同步和快速定位研究的关键。目前, GPS 的 BLOCKIIR 卫星、欧盟的伽利略卫星以及中国的北斗二代卫星均具有自主导航能力^[1-2], 而自主导航要求地面预报 210 天的星历和钟差作为先验信息, 其中我国的北斗二代系统由于受地面监测站布设范围的限制, 卫星钟误差的测量不可能连续进行, 在不可见弧段, 卫星钟与系统时间的同步只能由卫星钟自己维持, 如果地面监测站发生故

障, 在轨卫星就需要较长时间的高精度实时预报钟差来进行自身时间同步, 因此如何提高实时卫星钟差的中长期预报精度值得研究。在卫星钟差预报方面, 国内外学者开展了广泛的研究, 崔先强等^[2-3]利用灰色模型进行了事后卫星钟差预报研究, 其长期预报精度优于 1 μ s。郭海荣^[4]、朱祥维^[5]等利用顾及随机噪声的卡尔曼滤波进行不同时长的钟差预报研究, 得出了一些有意义的结论; Epstein 等^[6]通过卡尔曼滤波对在轨 GPS Rb 钟状态参数进行预报, 预报时间为 1 天时, 能给出较好的预报结果。郑作亚等^[7]利用灰色模型进行了实时卫星钟差短期预报研究, 取得了预报单天钟差优于 5ns 的精度。总体而言, 目前钟差预报研究大部分仍然是纯算法研究, 很少兼顾钟本身的物理特性,

资助项目:国家自然科学基金项目(40672173、40774001、40841021); 国家 863 项目(2007AA12Z331)

而且集中在实时短期预报或事后长期预报方面，很难满足长时间卫星自主导航的高精度实时钟差预报要求。针对这些问题，本文结合钟自身的物理特性，构造抗差二次多项式钟差拟合模型，并结合求和自回归滑动平均模型 (ARIMA) 进行实时钟差长期预报研究。最后，通过算例分析了本文所提算法的优越性和精度。

2 钟差拟合模型

进行卫星钟差拟合预报，首先需要构造精密钟差模型，而表征卫星钟时频域稳定性的因素通常包括相位、频率、频漂（老化率）等，由于这三种因素是构成钟物理评判标准的重要组成部分，于是选用包含这三种因素的二次多项式模型作为钟差模型。事实上，GPS 导航文件的卫星钟差也正是基于这三种因素构成。二次多项式钟差拟合模型如下：

$$\Delta t_i = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + v_i \quad (1)$$

式中 a_0 , a_1 , a_2 为星钟参数，对应钟差（相位）、钟速（频率）和钟漂（频漂）； t_0 为星钟参数的参考历元， Δt_i 为钟差观测值。

钟差拟合模型的精度直接决定其预报精度，而在获取的钟差观测数据中，由于受断电、设备故障和外部干扰等因素影响，钟差观测数据中不可避免地存在观测异常，这种异常会直接影响拟合模型的精度。因此，为了抵制这些异常点污染拟合模型，本文引入抗差估计^[8-9]以便控制观测异常的影响。

3 抗差最小二乘 (RLS)

钟差拟合模型 (1) 可写成如下形式：

$$V = At - l \quad (2)$$

其中， t 为三个星钟参数， A 为设计矩阵， l 为钟差观测值， V 观测值残差。

采用 IGG3 思想构造抗差等价权^[8-9]：

$$\bar{p}_i = \begin{cases} 1 & |v_i / \sigma_{v_i}| \leq k_0 \\ \frac{k_0}{|v_i / \sigma_{v_i}|} \left(\frac{k_1 - |v_i / \sigma_{v_i}|}{k_1 - k_0} \right)^2 & k_0 < |v_i / \sigma_{v_i}| \leq k_1 \\ 0 & |v_i / \sigma_{v_i}| > k_1 \end{cases} \quad (3)$$

其中， \bar{p} 为抗差等价权， v_i 为观测量残差， σ_{v_i} 为观测误差的均方根误差， k_0 , k_1 为控制常量， k_0 一般取 1.5~2.5， k_1 一般取 3.0~4.5。

将 (3) 式构造的等价权带入观测方程 (2)，利用抗差最小二乘准则^[9]：

$$V^T \bar{P} V = \min \quad (4)$$

可推出星钟参数的抗差解为：

$$t = (A^T \bar{P} A)^{-1} A^T \bar{P} l \quad (5)$$

目前，GPS 卫星钟的单天稳定性较好，可以达到 10^{-14} /day。但随着时间增长，其频漂值并不稳定，表

现出一定的随机特性（如图 1-2 所示），而钟速参数则随时间逐渐呈线性或二次曲线状变化（如图 3-4 所示）。因此较长时间的钟差数据是难以用一个固定的二次多项式进行描述。目前绝大多数钟差模型都是基于全部观测数据一次构造整体拟合模型，这些方案无法揭示钟速和钟漂的长期变化规律，因此也就无法扣除长期预报模型的系统误差，从而严重影响拟合精度和预报精度的提高。

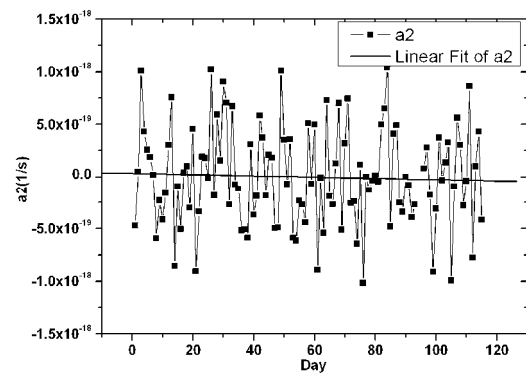


Figure 1. Clock shift time serial of Satellite 2 (115 days)

图 1. 二号卫星 115 天的钟漂变化序列

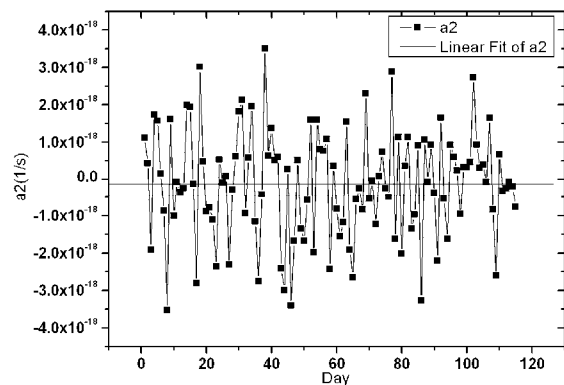


Figure 2. Clock shift time serial of Satellite 4 (115 days)

图 2. 四号卫星 115 天的钟漂变化序列

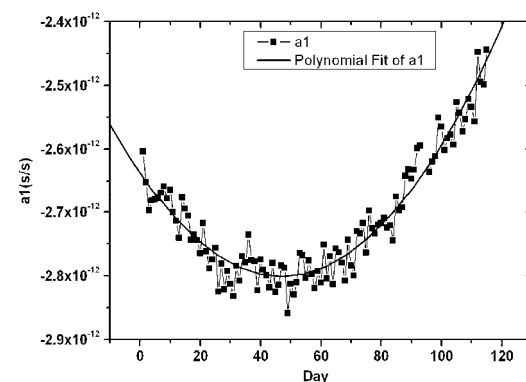


Figure 3. Clock velocity time serial of Satellite 2 (115 days)

图 3. 二号卫星 115 天的钟速变化序列

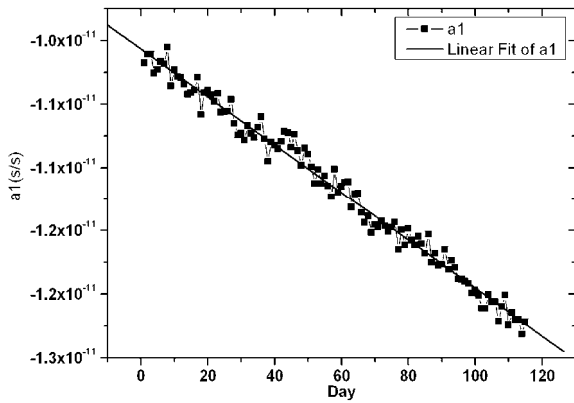


Figure 4. Clock velocity time serial of Satellite 4 (115 days)

图 4. 四号卫星 115 天的钟速变化序列

针对钟速、钟漂序列存在的长期变化特性，本文提出，首先对单日钟差观测数据利用二次多项式模型进行抗差最小二乘拟合，求出钟差、钟速和钟漂的长期时间序列；其次，根据星钟参数时间序列具有平稳性（图 1-2）或求差后具有平稳性（图 3-4）的特点，利用求和自回归滑动平均模型（ARIMA）对星钟参数时间序列进行预报，根据预报的参数进行钟差求解。本文的方法一方面利用抗差二次多项式拟合模型兼顾了钟的物理特性，抵制了异常数据对预报精度的影响，同时构造星钟参数时间序列揭示钟速、钟漂的长期变化规律，最后利用 ARIMA 模型对星钟参数进行预报，通过预报参数求解长期预报钟差值。

4 求和自回归滑动平均模型（ARIMA 模型）

ARIMA模型简称B-J法或求和自回归滑动平均模型，它是美国威斯康辛大学的Box和英国的统计学家Jenkins在1970年提出的。该模型包含时间序列的自回归（AR）模型和滑动平均（MA）模型，是一种综合的预测方法。其中，自回归滑动平均模型ARMA(p, q)形式如下式所示：

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (6)$$

其中， φ_i 为自回归模型参数， θ_i 为滑动平均模型参数， $\{x_t\}$ 为观测值数据序列， p 、 q 分别为自回归和滑动平均模型的阶数， $\{a_t\} \sim N(0, \sigma^2)$ 。

ARMA模型只适用于平稳随机序列，然而在实际应用中，观测数据很难满足这一要求，通常需要对其作差分处理。基于差分后的时间序列建立的模型称为求和自回归滑动平均模型，记为

$\{x_t\} \sim ARIMA(p, d, q)$ ，其中， p 、 q 与（6）式同， d 为差分的阶数。

要确定 d 的值，可以通过自相关函数来判断。如果 d 次差分后的序列的自相关函数很快下降为0，则说明差分后的序列是平稳的，反之则不平稳^[10]。在对数

据进行平稳化处理，根据模型的自相关函数和偏相关函数的拖尾性或截尾性判断时间序列属于何种类型^[10]，同时还需要利用Akaike的AIC或BIC准则^[11-12]来确定模型的阶数。本文采用AIC准则，其准则函数定义如下：

$$AIC(p) = \ln \sigma_0^2(p) + \frac{2p}{N} \quad (7)$$

本文的实时卫星钟差长期预报算法简要实现流程如图 5 所示：

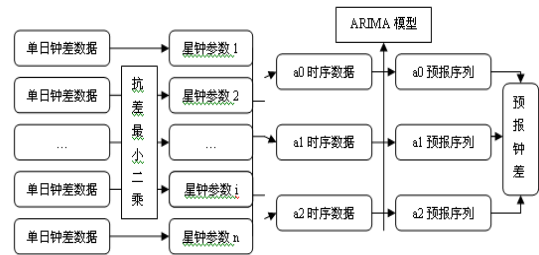


Figure 5. Flow of long-term and real-time satellite clock error prediction

图 5. 实时卫星钟差长期预报实现流程

由图 5 可以看出，本文的 RLS+ARIMA 预报模型主要实现思想为：首先构造二次多项式钟差模型，利用抗差最小二乘（RLS）分别计算单天的星钟参数，得到星钟参数的长期时间序列；其次根据计算得到的三个星钟参数时间序列构造合适的 ARIMA 预报模型进行星钟参数预报，从而获得星钟参数的预报序列；最后，根据星钟参数预报序列利用式（1）进行预报钟差求解。

5 算例分析

本文算例数据取自 IGS 发布的精密钟差数据（ftp://igsceb.jpl.nasa.gov/）。数据采集时间为 2008 年 7 月 27 日到 2009 年 02 月 14 日，共计 200 天的数据，钟差数据的采样间隔为 5 分钟。考虑到目前 GPS 卫星大部分搭载的是高精度 Rb 钟，而且我国的北斗二代导航系统配备的也是国产 Rb 钟，本文选择配备 Rb 钟的 4 号卫星作为研究对象，前 100 天作为拟合数据，后 100 天作为检核数据。

实时钟差预报的均方根差为：

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta \varepsilon_i)^2} \quad (9)$$

其中 $\Delta \varepsilon_i$ 为实时预报钟差和 IGS 精密钟差的差值， n 为预报钟差的个数。

5.1 钟差模型拟合及其特性分析

为了直观显示钟差序列中的粗差分布情况，计算得到 100 天钟差序列对应的频率序列如图 6 所示，从

图 6 可以看出，该钟差序列中存在多处明显粗差，若不进行处理，势必影响钟差模型的拟合预报精度。因此，本文利用抗差最小二乘对单天钟差数据进行拟合，得到星钟参数的时间序列。同时为了对比分析，还利用标准最小二乘进行了钟差模型拟合。两种方案的拟合精度信息如表 1 所示。

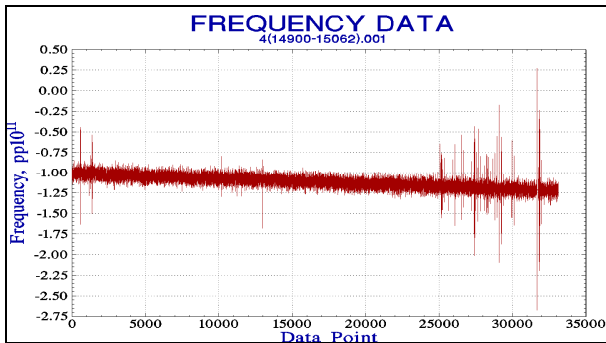


Figure 6. Frequency time serial (100 days)

图 6. 频率数据时间序列分布 (100 天)

Table 1. Statistic RMS results of two schemes unit: nanosecond

表 1. 两种方案处理的拟合精度统计 单位: 纳秒

	Max	RMS
标准最小二乘	4.8	0.9
抗差最小二乘	2.6	0.7

由表 1 可以看出，抗差最小二乘由于引入抗差等价权，有效抑制了粗差对拟合模型的影响，拟合精度优于标准最小二乘。抗差最小二乘的平均拟合精度约为 0.7ns，对于钟差长期预报而言，这种拟合精度的损失是可以忽略的。

为了揭示星钟参数的长期变化规律，利用抗差最小二乘计算得到星钟参数时间序列如图 7-9 所示：

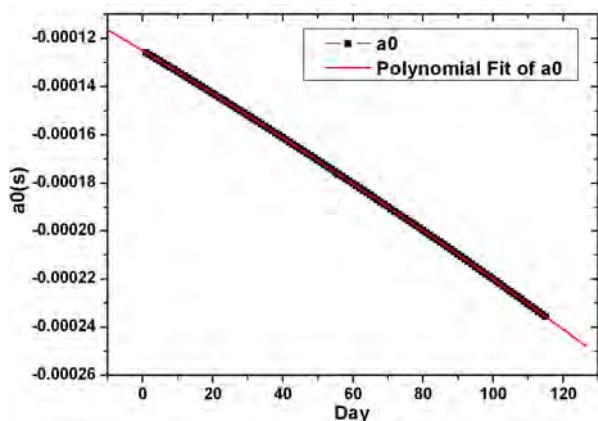


Figure 7. Clock error time serial

图 7. 钟差时间序列

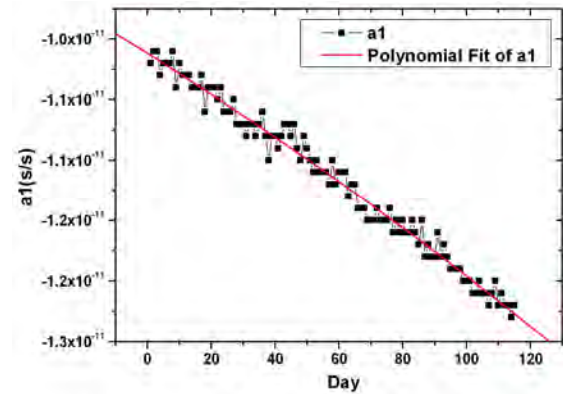


Figure 8. Clock velocity time serial

图 8. 钟速时间序列

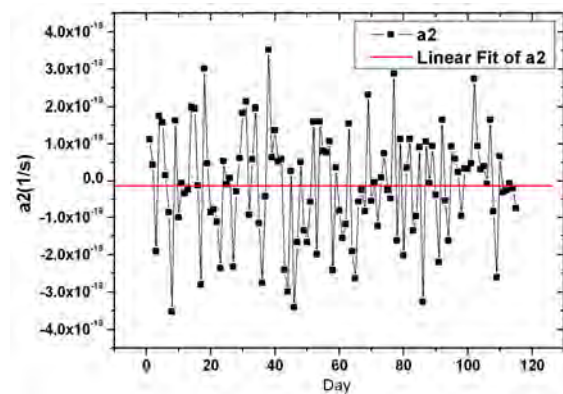


Figure 9. Clock shift time serial

图 9. 钟漂时间序列

由图 7-9 可以看出，钟速和钟漂的长期性变化规律较为显著，分别表现为线性变化和平衡随机变化。而由于单天拟合的起始历元钟差值不同，其计算的钟差时间序列呈线性变化。星钟参数这种长期变化特征使得无法用固定的二次多项式模型来描述钟差变化。

5.2 基于 RLS+ARIMA 模型的实时钟差预报精度分析

为了验证本文所提算法的预报精度和优越性，设计以下五种方案进行对比：

方案 1: 直接利用抗差二次多项式模型拟合 1 组星钟参数，根据星钟参数进行实时长期预报 (RLS)；

方案 2: 根据钟差时间序列，直接利用 ARIMA (20, 2, 10) 模型进行预报 (ARIMA)；

方案 3: 首先用抗差最小二乘拟合出星钟参数的时间序列，然后用抗差二次多项式对钟差和钟速序列进行预报 (图 7-8)，用抗差一次多项式对钟漂序列进行预报 (图 9)，根据星钟参数的预报结果进行预报钟差值求解 (RLS+RLS)；

方案 4: 首先用最小二乘拟合出星钟参数的时间

序列, 然后分别用 ARIMA (40, 2, 0)、ARIMA (5, 2, 0)、ARIMA (2, 0, 0) 对钟差、钟速和钟漂时间序列进行预报, 根据星钟参数的预报结果进行钟差求解 (LS+ARIMA);

方案 5: 同方案 4 类似, 只是在最小二乘求解星钟参数时引入抗差估计, 其他步骤相同 (RLS+ARIMA)。

五种方案的预报残差分布如图 10 所示(为了图形直观, 每 1000 历元绘一个点):

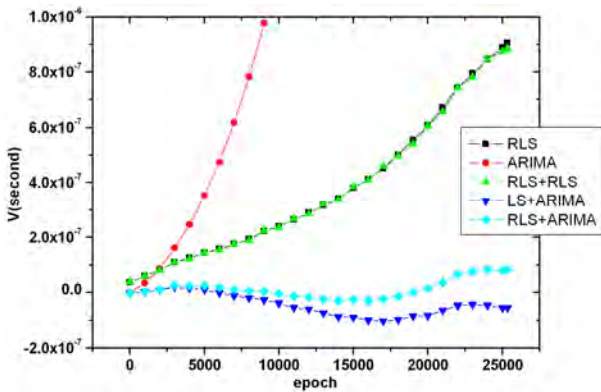


Figure 10. Long-term forecast results of five schemes

图 10. 五种方案的长期预报结果

五种方案的预报精度统计信息如表 2 所示:

Table 2. Statistic RMS results of five schemes in 100 days unit: microsecond

表 2. 五种方案 100 天的预报精度统计 单位: 微秒(us)

	Mean	RMS
方案 1	0.372	0.447
方案 2	2.420	3.210
方案 3	0.370	0.445
方案 4	-0.045	0.059
方案 5	0.011	0.034

由图 10 和表 2 可以看出:

- (1) 方案 2 由于是纯数学方法 (ARIMA), 没有兼顾钟本身的物理特性, 其长期预报精度较低, 达 3.2us。
- (2) 分步 RLS 预报 (方案 3) 和整体 RLS 预报 (方案 1) 相比, 精度略有提高, 但改善有限, 主要是因为方案 3 的分步钟差拟合, 其实质仍是多项式模型, 只能预报钟差序列的系统性部分, 随机部分无法预报, 但方案 3 可以精确揭示星钟参数的长期变化规律。

(3) 方案 4 和方案 5 的预报精度较高, 主要是由于 ARIMA 模型通过差分的方式对星钟参数的系统性部分进行了有效保留, 同时利用自回归滑动平均模型, 有效描述了平稳时间序列的随机性部分, 并能对其进行较为准确的预报, 相比最小二乘的预报模型, 其精度改善幅度高达 92%, 提高了近一个量级。

(4) 方案 5 由于引入抗差估计, 有效抵制了观测异常点对拟合模型的污染, 更为准确地给出了星钟参数的时间序列, 为下一步 ARIMA 预报提供了准确的输入数据, 相比没有进行抗差处理的方案 4, 精度提高了近 42%。

综上所述, 本文提出的 RLS+ARIMA 两步钟差预报算法, 相比其他常规方案, 精度提高显著, 100 天的实时钟差预报精度可达 34ns (约 10m), 这对于卫星自主导航实时钟差长期预报具有重要的作用。

6 结论与建议

1. GPS 卫星钟的单元稳定性较好, 但随着时间增长, 其钟漂参数表现出一定的随机特性, 而钟速参数则随时间逐渐呈线性或二次曲线状变化, 因此, 长期钟差预报模型难以用一个固定的二次多项式或其他模型确定, 而星钟参数的长期变化规律需要在预报工作中予以考虑。

2. 预报模型中引入抗差估计能够有效抵制观测异常对拟合模型的污染, 大大改善模型预报精度。

3. 本文提出的 RLS+ARIMA 两步钟差长期预报算法, 一方面兼顾了钟自身的钟速、钟漂特性, 同时利用抗差最小二乘求解星钟参数时间序列, 揭示了其长期变化规律, 另外还利用 ARMA 模型对星钟参数的随机性部分进行了有效预报, 相比常规方案, 精度提高显著, 算例中 100 天的实时钟差预报精度可达 34ns。

4. 本文所提的算法对于我国北斗二代卫星导航卫星实时钟差长期预报工作具有参考价值。

References (参考文献)

- [1] Jiao Wenhai. Researches on the Realization of Satellite Navigation Coordinate Reference System [D]. Shanghai: Shanghai Astronomical Observatory, 2003.08(Ch). 焦文海. 卫星导航系统坐标基准建立问题的研究[D]. 上海: 中科院上海天文台, 2003 年 8 月.
- [2] Cui Xianqiang, Jiao Wenhai. Grey System Model for the Satellite Clock Error Predicting[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2005, 30(3): 447-449(Ch). 崔先强, 焦文海. 灰色系统模型在卫星钟差预报中的应用[J]. 武汉大学学报 (信息科学版), 2005, 30(3): 447-449.
- [3] Lu Xiaofeng, Yang Zhiqiang, Jia Xiaolin et al. Parameter Optimization Method of Gray System Theory for the Satellite Clock Error Predicating[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2008, 33(5): P393-396(Ch). 路晓峰, 杨志强, 贾小林等. 灰色系统理论的优化方法及其在卫星钟差预报中的应用[J], 武汉大学学报 (信息科学版), 2008,

- 33(5): P 393-396.
- [4] Guo Hairong. Study on the Analysis Theories and Algorithms of the Time and Frequency Characterization for Atomic Clocks of Navigation Satellites [D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2006(Ch).
郭海荣. 导航卫星原子钟时频特性分析理论与方法研究[D]. 郑州: 信息工程大学, 2006.
- [5] ZHU Xiangwei, XIAO Hua, YONG Shaowei, *et al.* The Kalman Algorithm Used for Satellite Clock Offset Prediction and Its Performance Analysis [J], *Journal of Astronautics*, 2008, 3(33), P965-970(Ch).
朱祥维, 肖华, 雍少为等. 卫星钟差预报的 Kalman 算法及其性能分析[J], *宇航学报*, 2008, 3(33), P965-970.
- [6] Epstein M., Freed G. and Rajan J. GPS IIR Rubidium clocks: in-orbit performance aspects[C]. In *Proceedings of the 35th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting*, 2003, 117-134.
- [7] Zheng Zuoya, Chen Yongqi, Lu Xiushan. An Improved Grey Model for the Prediction of Real-Time GPS Satellite Clock Bias [J], *Acta Astronomica Sinica*, 2008, 49(3): P306-320(Ch).
郑作亚, 陈永奇, 卢秀山. 灰色模型修正及其在实时 GPS 卫星钟差预报中的应用研究[J], *天文学报*, 2008, 49(3): P306-320.
- [8] Yang Yuanxi. Robust Estimation for Dependent Observations [J]. *Manuscripta Geodetica*. 1994, 19: 10-17.
- [9] Yang Yuanxi, Song Lijie, Xu Tianhe. Robust estimator for correlated observations based on infector equivalent weights [J]. *Journal of Geodesy*, 2002, 76(6-7): 353-358
- [10] Wang Zhenlong. Time series analysis [M]. Beijing: China Statistics Press, 2004(Ch).
王振龙. 时间序列分析[M]. 北京: 中国统计出版社, 2004.
- [11] Akaike H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle [C]. In *Second International Symposium in Information Theory*. Eds B. N. Petroc and F.Caski, Budapest, Akademiai Kiado, 1973, 276-281.
- [12] Akaike H. On entropy maximization principle [J]. In *Applications of Statistics*. Ed P. R. Krishnaiah. North Holland, Amsterdam, 1977, 27-41.