

# Frequency Spectrum Truncation Applied in Anti-Aliasing of Radio Frequency Under-Sampling

Yongli AN, Xuefei GAO, Dongyan CUI

College of Information, Hebei Polytechnic University, Tangshan, China

Email: anyl@heut.edu.cn, gaoxf@heut.edu.cn, cuidy@heut.edu.cn

**Abstract:** 3G terminal reconfiguration can be realized by relying on the software-defined radio technologies. Among them, both fast digital signal processing technology and high-performance radio frequency data collection are the key technical issues. This paper focuses on the processing method of frequency spectrum aliasing when frequency spectrum aliasing appears under the situation of under-sampling of radio frequency signals. The truncation frequency spectrum approach is used, simultaneously; it analyzes the influence of the truncation treatment and frequency spectrum aliasing on signal restoration. Finally, the paper discusses in detail the relations between the spectrum truncation filter cutoff frequency and under-sampling frequency and the signal-to-noise ratio.

**Keywords:** frequency spectrum truncation; under-sampling; frequency spectrum aliasing; cutoff frequency

## 频谱截断法应用于射频欠采样抗混叠

安永丽, 高雪飞, 崔东艳

河北理工大学, 信息学院, 唐山, 中国, 063009

Email: anyl@heut.edu.cn, gaoxf@heut.edu.cn, cuidy@heut.edu.cn

**摘要:** 3G终端的可重配置可依靠软件无线电技术来实现。快速的数字信号处理技术及高性能的射频数据采集都是其中关键性的技术问题。文章着重研究了对射频信号欠采样后, 出现频谱混叠的情况时, 对混叠频谱的处理方法。主要采用了截断频谱的方法, 同时分析了截断处理及频谱混叠对恢复信号的影响。详细讨论了频谱截断的滤波器截止频率及欠采样频率与信噪比的关系。

**关键词:** 频谱截断; 欠采样; 频谱混叠; 截止频率

### 1 引言

3G系统为了更好的实现无障碍的通信, 终端需要漫游于不同的系统媒体间, 可通过终端支持可重配置来实现。而软件无线电可作为解决终端可重配置的关键技术。在射频进行A/D采样是整个软件无线电系统设计的基础及实现的难点。射频带通采样结构由于A/D器件采样速率及工作带宽的限制和信噪比等指标还不能满足在射频采样的要求, 其发展受到了制约<sup>[1]</sup>, 因此对信号欠采样理论的研究在软件无线电系统设计及3G终端可重配置的实现上都具有重要的指导意义。

对数字调制信号欠采样的情况下频谱会发生混叠现象。若直接由抽样值进行判决存在采样时钟偏差会导致误码的问题。已经经过仿真验证<sup>[2]</sup>, 较小的时钟偏差就会造成较大的误码率, 因此必须避免时钟偏差。对于采样后已发生混叠的数字调制信号, 若要从混叠

的信号中恢复原信号还可以从另外两个思路来考虑。一是对混叠的部分进行截断处理, 考察频谱短截对恢复信号的影响; 二是应用现代滤波器及小波采样理论, 现代滤波器是可以处理信号和噪声在同一频带的滤波器, 它必与信号本身有关, 要不然它不可能从混叠的频谱中把原信号的频谱分离出来<sup>[3]</sup>。

### 2 频谱截断引起的码间干扰分析

#### 2.1 频谱截断的影响

线性数字已调信号的频谱是数字基带信号频谱的线性搬移, 两者具有相同的频谱结构, 因此可从基带信号频谱混叠入手来研究频谱短截的影响。用理想低通滤波器对信号频谱进行短截, 即做频域的相乘运算, 由傅立叶变换的性质, 即相当于在时域做卷积运算。

现考虑频谱短截对单个矩形脉冲的影响。单个码元就是一个宽为 $T$ 的矩形, 它与 $\sin c(t) = \sin(pt) / (pt)$

\*河北理工大学自然科学研究基金 (No.Z0816)

做卷积运算。应用卷积运算的性质即：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \frac{df_2(t-t)}{dt} dt = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} \end{aligned}$$

矩形脉冲求导是两个冲击  $d(t)$  和  $-d(t-1)$ ，信号与单位冲击的卷积为：

$$f(t) * d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d(t-t) dt = f(t) \quad (1)$$

因此，矩形脉冲求导后与  $\text{sinc}(t)$  的卷积就是  $\text{sinc}(t)$  及其延迟相叠加，对结果需进行积分才得到所需的矩形脉冲和理想低通时域函数的卷积。而  $\text{sinc}(t)$  的不定积分没有闭合形式的解，可以把  $\text{sinc}(t)$  展开成幂级数的形式，求其积分值。麦克劳林级数展开式如下。

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (2) \\ \sin c(t) &= \frac{\sin(pt)}{pt} = \frac{1}{p} \left[ p - \frac{p^3 x^2}{3!} + \frac{p^5 x^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{p^{2n-1} x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right] \quad (3) \end{aligned}$$

由上卷积运算的结果为：

$$\begin{aligned} \int \sin c(t) - \sin c(t-1) dt &= \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(pt)^{2n-1}}{(2n-1) \times (2n-1)!} - \\ &= \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[p(t-1)]^{2n-1}}{(2n-1) \times (2n-1)!} \quad (4) \end{aligned}$$

以上结果经分析可大致得出用不同宽度的理想低通滤波器对矩形脉冲序列进行短截的影响，但不够直观。下面用图解法进一步说明这种影响。卷积过程示意图如图 1 所示。

影响结果主要有两点。一是在理想特性不连续点形成过渡带，过渡带宽度近似等于  $\text{sinc}$  函数的主瓣宽度。二是矩形脉冲的幅度发生波动，令  $\text{sinc}$  函数的主瓣宽度为  $d$ ，则最大峰值在  $T/2 - d/2$  处，最大负峰在  $T/2 + d/2$  处。当选用不同宽度的滤波器时，结果如图 2 所示。

(1) 滤波器带宽为矩形脉冲序列频谱主瓣宽的 2 倍 这时对于时域函数来说，如图 2(a)所示,矩形脉冲  $g(t)$  宽为  $T=1$ ，理想低通滤波器的时域响应  $h_1(t)$  的主瓣宽为  $1/2$ 。按照如上的分析卷积结果  $g_1(t)$  在  $t=1/2$  处出现过渡带，最大正负峰分别出现在  $t=1/4$  和  $t=3/4$  处。可见抽样时刻无码间干扰。

(2) 滤波器带宽刚好能将矩形脉冲序列频谱的主瓣滤过 此时，矩形脉冲  $g(t)$  宽为  $T=1$ ，而理想低通滤波器的时域响应  $h_2(t)$  的主瓣宽也为 1。可得卷积结果  $g_2(t)$  在  $t=1/2$  处将出现过渡带，最大正负峰均出现在  $t=0$  处，所以没有带内波动。可见也是没有码间干扰的。

情况 2 是刚好截取了矩形脉冲序列频谱主瓣的情况，这是极限的情况，截取范围更窄的话就会出现码间干扰。因此，只要使矩形脉冲序列频谱的主瓣通过理想低通滤波器，就可以利用抽样值恢复码元序列，这是无码间干扰的下限。

## 2.2 频谱截断在实际应用中的意义

A/D 转换过程中，前端抗混叠滤波器采用模拟低通，要使其达到接近理想的特性是很难的，若降低要求使其有平滑的过渡带就更加容易实现。这里，采样后允许频谱混叠，但下限是不能混叠到频谱的主瓣内，再用数字滤波器将主瓣滤出，就可以在无码间干扰的情况下得到抽样值，进而恢复数字序列。数字滤波器较模拟滤波器更容易实现。实际是降低了前端抗混叠滤波器的设计要求<sup>[4]</sup>。

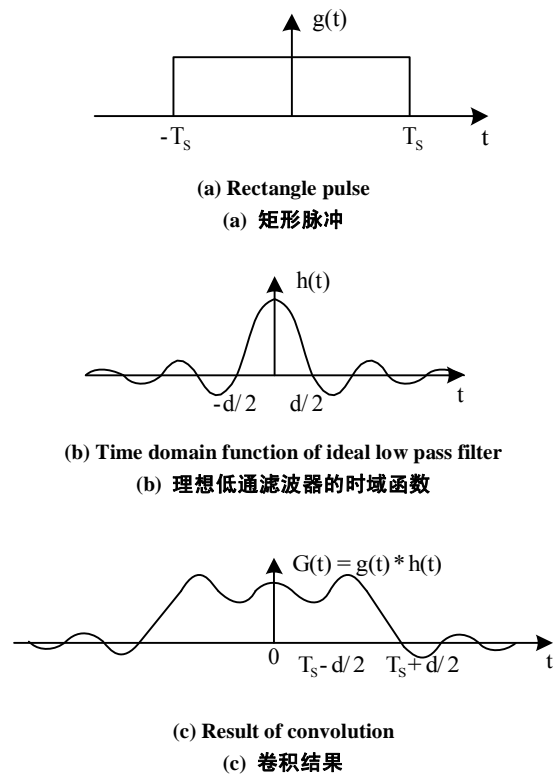


Figure 1. Schematic drawing of convolution process  
图 1. 卷积过程示意图

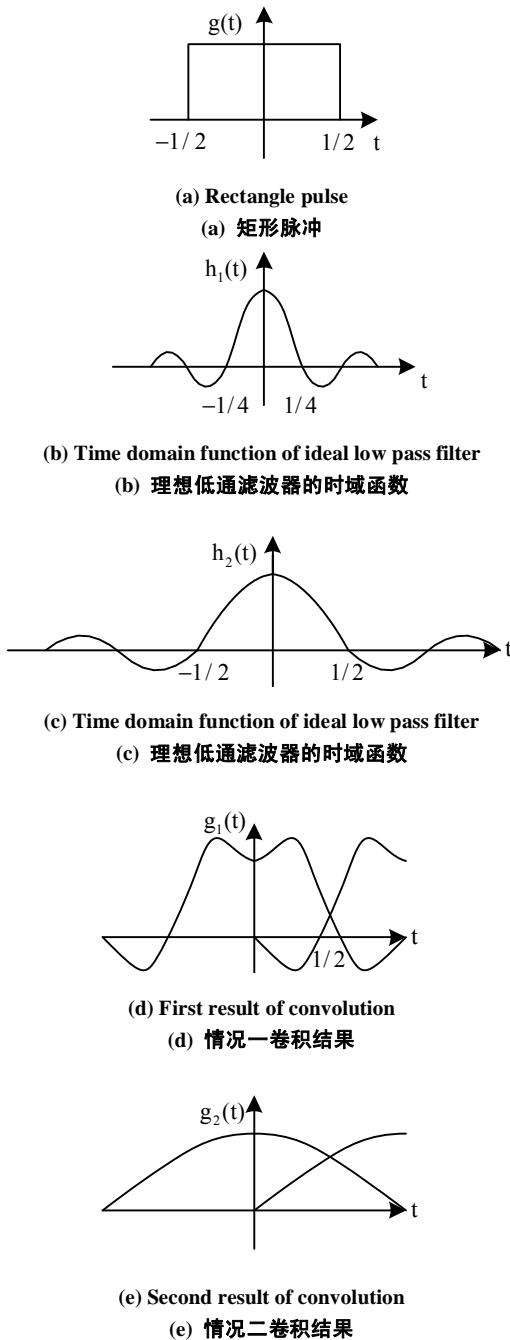


Figure 2. Schematic drawing of convolution process  
图 2. 卷积过程示意图

### 3 频谱混叠引起的噪声分析

#### 3.1 采样频率与 SNR 的关系

当滤波器截止频率固定时，分析采样频率与信噪比的关系。推导信噪比的表达式，设采样频率为  $f_s$ ，滤波器截止频率为  $f_c$ ，可分两种情况讨论：

(1) 滤波器截止频率等于频谱的第一零点带宽  $R_s$ ，SNR 可表示为：

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{\int_{-R_s}^{R_s} P(f)df}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-R_s}^{R_s} P(f - kf_s)df} \quad (5)$$

式中  $P(f) = Sa^2(pfT_s)$  是矩形脉冲序列的频谱，这里设单个码元持续时间  $T_s = 1s$ 。因为对  $Sa^2(pf)$  取积分得不到闭合形式的解，因此可将其展成幂级数再取积分。

$$\frac{\sin pf}{pf} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(pf)^{2n-2}}{(2n-1)!} \quad (6)$$

可得信号功率为：

$$S = \int_{-R_s}^{R_s} P(f)df = \int_{-R_s}^{R_s} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{n+m-2} \frac{(pf)^{2n+2m-4}}{(2n-1)!^2} df = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{n+m-2} \frac{(pf)^{2n+2m-3}}{(2n+2m-3)(2n-1)!^2} \Big|_{-R_s}^{R_s} \quad (7)$$

设  $P(f)$  的原函数为  $Q(f)$ ，则  $S = Q(f) \Big|_{-R_s}^{R_s} = 2Q(R_s)$ 。

接下来求噪声功率  $N$ ，可以表示为：

$$N = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-R_s}^{R_s} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{n+m-2} \frac{(pf - kf_s)^{2n+2m-4}}{(2n-1)!^2} df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Q(f - kf_s) \Big|_{-R_s}^{R_s} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [Q(R_s - kf_s) - Q(-R_s - kf_s)] \quad (8)$$

得到信噪比的表达式如下。

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{2Q(R_s)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [Q(R_s - kf_s) - Q(-R_s - kf_s)]} \quad (9)$$

计算了采样频率  $f_s$  取  $1 \sim 2R_s$  时， $f_s$  与 SNR 的关系曲线，如图 3 所示。

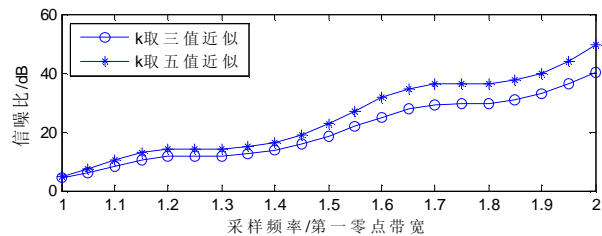


Figure 3. Curves diagram between  $f_s$  and SNR  
图 3.  $f_s$  与 SNR 的关系曲线图

图 3 中的两条曲线分别为对噪声功率  $N$  的表达式计算不同的近似程度时得到的曲线。由图可见，两条

曲线具有相似的规律性。这就表明这里对噪声功率  $N$  取近似的计算并不影响采样频率与信噪比的关系曲线的大致规律。可见, 此时随采样频率  $f_s$  的增加, 信噪比 SNR 逐渐增加。

(2) 滤波器截止频率等于采样频率的一半分析过程同第一种情况, 得到信噪比 SNR 的表达式如下。

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{\int_{-f_s/2}^{f_s/2} P(f) df}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} P(f - kf_s) df} \quad (10)$$

同样的方法计算了采样频率  $f_s$  取  $1 \sim 2R_s$  时,  $f_s$  与 SNR 的关系曲线, 如图 4 所示。

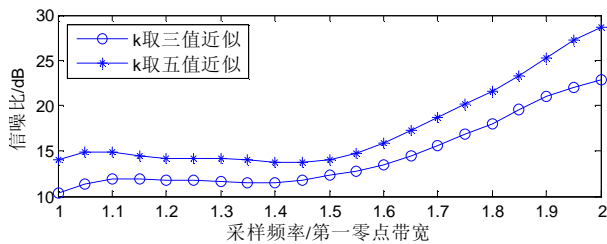


Figure 4. Curves diagram between  $f_s$  and SNR  
图 4.  $f_s$  与 SNR 的关系曲线图

可见, 此时当采样频率小于  $1.5R_s$  时, 信噪比较低且曲线较平坦; 而当大于  $1.5R_s$  时, 信噪比随采样频率的增加而增加。

综合上述两种情况, 在实际应用中应同时考虑滤波器的截止频率和采样频率的取值, 以决定最佳的信噪比。

### 3.2 滤波器截止频率与 SNR 的关系

当采样频率固定时, 分析滤波器截止频率与信噪比的关系, 推导信噪比的表达式。同前一小节分析, 可得信号功率为:

$$S = \int_{-f_c}^{f_c} P(f) df = \int_{-f_c}^{f_c} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{n+m-2} \frac{(pf)^{2n+2m-4}}{(2n-1)!^2} df = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{n+m-2} \frac{(pf)^{2n+2m-3}}{(2n+2m-3)(2n-1)!^2} \Big|_{-f_c}^{f_c} \quad (11)$$

设  $P(f)$  的原函数为  $Q(f)$ , 则  $S = Q(f) \Big|_{-f_c}^{f_c} = 2Q(f_c)$

接下来求噪声功率  $N$ , 可以表示为:

$$N = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-f_c}^{f_c} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{n+m-2} \frac{(pf - kf_s)^{2n+2m-4}}{(2n-1)!^2} df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Q(f - kf_s) \Big|_{-f_c}^{f_c} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [Q(f_c - kf_s) - Q(-f_c - kf_s)] \quad (12)$$

得到信噪比的表达式如下。

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{2Q(f_c)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [Q(f_c - kf_s) - Q(-f_c - kf_s)]} \quad (13)$$

$f_s$  取  $0.5 \sim 2.0R_s$ , 仿真结果如图 5 所示。

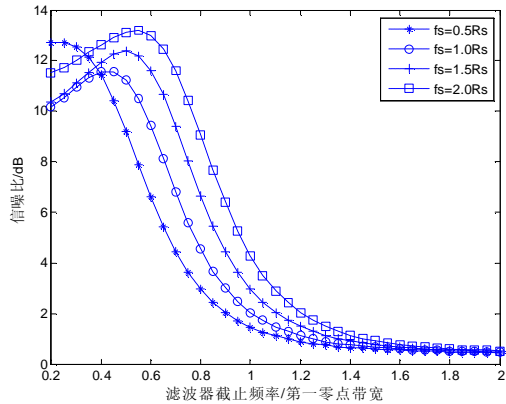


Figure 5. Curves diagram between  $f_c$  and SNR  
图 5.  $f_c$  与 SNR 的关系曲线图

## 4 结束语

对欠采样下数字调制信号的频谱混叠问题进行了深入的研究。分析了频谱混叠的截断处理会引起码间干扰的问题。给出了频谱截断对恢复码元序列的下限, 即只要使矩形脉冲序列频谱的主瓣通过低通滤波器, 就可以利用抽样值恢复码元序列。最后, 分析了频谱混叠引起噪声的问题。讨论了采样频率与信噪比的关系, 同时讨论了滤波器截止频率与信噪比的关系。经过实验仿真得到了关系曲线, 可作为选择最佳采样频率和最佳滤波器截止频率的依据。针对射频欠采样的频谱截断法的研究, 将有助于软件无线电技术应用于未来的 3G 终端可重配置的实现。

## References (参考文献)

- [1] Yang Xiaoni, Principle and Application of Software Defined Radio[M], Electronic Industry Press, 2001: P58-60 (Ch). 杨小牛等著. 软件无线电原理与应用[M]. 北京: 电子工业出版社. 2001: P58-60.
- [2] An Yongli, Wu Changqi, Zhang Ying, Research of Sampling of Linear Carrier Modulation Signal[J], Radio Communications Technology, 2008,34(2), P25-27 (Ch). 安永丽, 吴长奇, 张颖等. 对线性载波调制信号采样的研究. 无线电通信技术[J]. 2008, 34(2), P25-27.
- [3] M.Unser. Sampling-50 years after Shannon[J]. Proceeding of the IEEE, 2000, 88(4): P569-587.
- [4] Xin Xiang, Bin Tian, Kechu Yi. A Novel Demodulation Algorithm Based on Samping with Aliasing. IEEE ICSP, 2004: P1817-1820.