

Teaching Research and Simulation of The Sampling Theorem Based on MATLAB GUI

HAN Xiao-xia, LI Cai-xia, ZHANG Cong

1. electronic information engineering institute of Hebei University, Baoding, China, 071002

1.sallyxiao77@yahoo.com.cn, 2.congguitarplayer@126.com

Abstract: Sampling theorem is the important content of the signal and system course. Article introduces the concept of sampling and the process of reconstructing a continuous-time signal from its samples. It focuses on the band-limited signal's frequency analysis, sampling theorem, reconstruction method. Using MATLAB software with its graphical user interface (GUI), A continuous signal sampling and reconstruction simulation software is designed with a good man-machine interactive interface. Through the examples simulation results demonstrate and compared with theoretical analysis, the time-domain sampling theorem is proved. This continuous signal sampling and reconstruction simulation software based on MATLAB GUI is not only available for students of signal and system course of the sampling theorem on experimental simulation. Students can deepen the understanding of the sampling theory. It also can assist teachers in classroom teaching presentations, instead of the traditional blackboard teaching to make classroom teaching more vivid and intuitive.

Key words: sampling theorem; MATLAB; GUI

基于 MATLAB GUI 的取样定理教学研究与仿真

韩晓霞, 李彩霞, 张聪

1. 河北大学电子信息工程学院, 保定, 中国, 071002

1. sallyxiao77@yahoo.com.cn, 2. congguitarplayer@126.com

摘要: 取样定理是信号与系统课程中的重要内容, 文章介绍了连续时间信号采样及重构的方法及过程, 利用 MATLAB 软件, 结合其图形用户界面接口 (GUI), 设计了具有良好人机交互界面的连续信号采样与重构仿真软件, 既可辅助教师进行课堂教学演示, 也可供学生对信号与系统课程中的取样定理进行实验仿真, 通过实例仿真给出的演示结果, 与理论分析进行对比验证了时域取样定理。

关键词: 取样定理; MATLAB; GUI

《信号与系统》课程是电气信息类专业学生的一门重要的专业基础课, 取样定理是信号与系统中的重要内容, 而且在数字信号处理、通信原理等课程中有重要的应用。本文利用 MATLAB 软件, 结合其图形用户界面接口 (GUI), 设计了具有良好人机交互界面的连续信号采样与重构仿真软件, 以此帮助学生深入理解取样定理的原理及应用。

1 取样定理简介

在信号与系统理论中, 取样定理论述了在一定条件下, 一个连续信号 $f(t)$ 完全可以用该信号在等时间间隔上的样本值表示^[1]。利用这些样本值可以恢复原信号。包括时域与频域两种, 这里着重讨论时域取样定

理。

1.1 信号的取样

信号的取样分为冲激取样和矩形脉冲取样, 这里选择的是冲激取样, 取样信号 $f_s(t) = f(t) \cdot \delta_{T_s}(t)$, 其中, 冲激取样信号 $\delta_{T_s}(t)$ 的表达式为:

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

其傅里叶变换为 $\omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$, 其中

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}, \text{ 设 } F(j\omega) \text{ 为 } f(t) \text{ 的傅里叶变换, 冲}$$

激取样过程的时域波形及其频谱如图 1 所示。

设 $f_s(t)$ 的频谱为 $F_s(j\omega)$ ，由傅里叶变换的频域卷积定理，有：

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

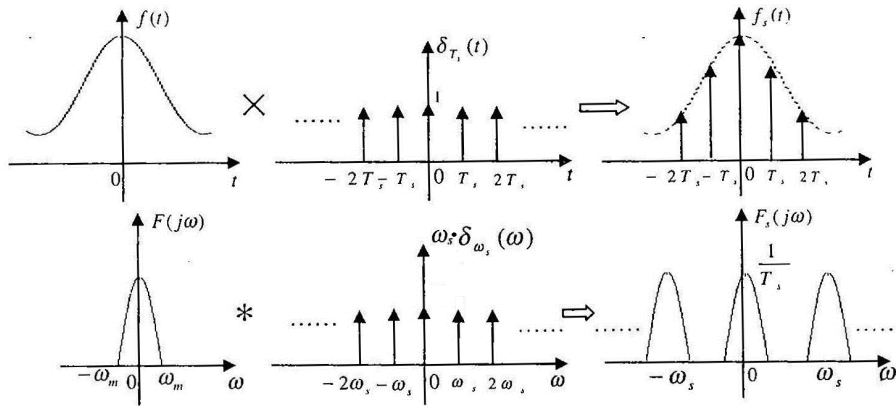


Figure 1. Impulse Sampling

图 1. 冲激取样

设 $f(t)$ 为带限信号，带宽为 ω_m ，即当 $|\omega| > \omega_m$ 时， $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 的值为 0，由图 1 可见， $f(t)$ 经采样后的频谱 $F_s(j\omega)$ 就是将 $F(j\omega)$ 在频率轴上搬移至 $0, \pm\omega_s, \pm 2\omega_s, \dots, \pm n\omega_s, \dots$ 处（幅度为原频谱的 $1/T_s$ 倍）。因此，当 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 时，频谱不发生混叠，而当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时，频谱发生混叠^[1]，如图 2 所示。

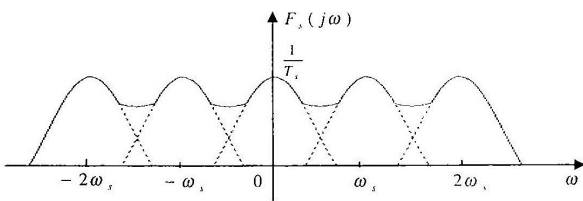


Figure 2. Aliasing

图 2. 混叠

1.2 信号的重构

在采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 时，可通过一个频率特性

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (\text{截止频率 } \omega_c \text{ 满足})$$

$\omega_m \leq \omega_c \leq \frac{\omega_s}{2}$) 的理想低通滤波器恢复原信号的频谱 $F(j\omega)$ ^[3]，显然， $F(j\omega) = H(j\omega) \cdot F_s(j\omega)$ ，与之对应的时域表达式为

$$f(t) = h(t) * f_s(t) \tag{1}$$

$$f_s(t) = f(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) \tag{2}$$

$$h(t) = F^{-1}[H(j\omega)] = T_s \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t) \tag{3}$$

将 (2) (3) 式代入 (1) 式得

$$f(t) = \frac{T_s \omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) Sa[\omega_c(t - nT_s)]$$

通过上述分析，得到以下的时域取样定理：

一个频谱在区间 $(-\omega_m, \omega_m)$ 以外为零的带限信号 $f(t)$ ，可唯一地由它的均匀取样信号

$$f_s(t) = f(nT_s) \text{ 确定，其中，取样间隔 } T_s \leq \frac{\pi}{\omega_m}$$

该取样间隔又称为奈奎斯特 (Nyquist) 间隔。取样频率必须满足 $f_s \geq 2f_m$ (即 $\omega_s \geq 2\omega_m$)，最低允许取

样频率称为奈奎斯特频率。

2 教学程序演示及实例仿真

选取连续信号 $f(t) = Sa(t)$ 作为被采样的信号，因为 $Sa(t)$ 的频谱是一个带宽为 $\omega_m = 1rad/s$ 的门函数，是典型带限信号，是分析其他信号的基础。实际信号中，绝大多数都不是严格意义上的带限信号，

这时根据实际精度要求来确定信号的带宽 ω_m [2]。

1. 当采样频率 $\omega_s > 2\omega_m$ 时，称为过采样， $\omega_c = 1.1\omega_m$ 。在输入中对应位置输入 1, 2.2, 1.1，即 $\omega_m = 1rad/s$, $\omega_s = 2.2rad/s$, $\omega_c = 1.1\omega_m$ ，点击开始得到结果如图 3 所示。

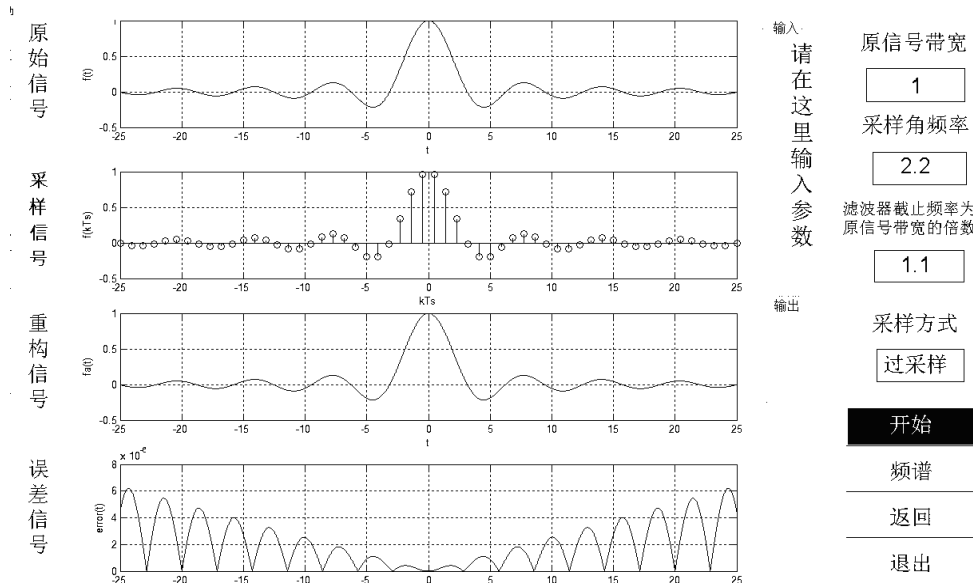


Figure 3. Oversampling
图 3. 过采样

2. 当采样频率 $\omega_s < 2\omega_m$ 时，称为欠采样，取 $\omega_c = 1.1\omega_m$ 。在输入中对应位置输入 1, 1.3, 1，即

$\omega_m = 1rad/s$, $\omega_s = 1.3rad/s$, $\omega_c = \omega_m$ ，点击开始得到结果如图 4 所示。

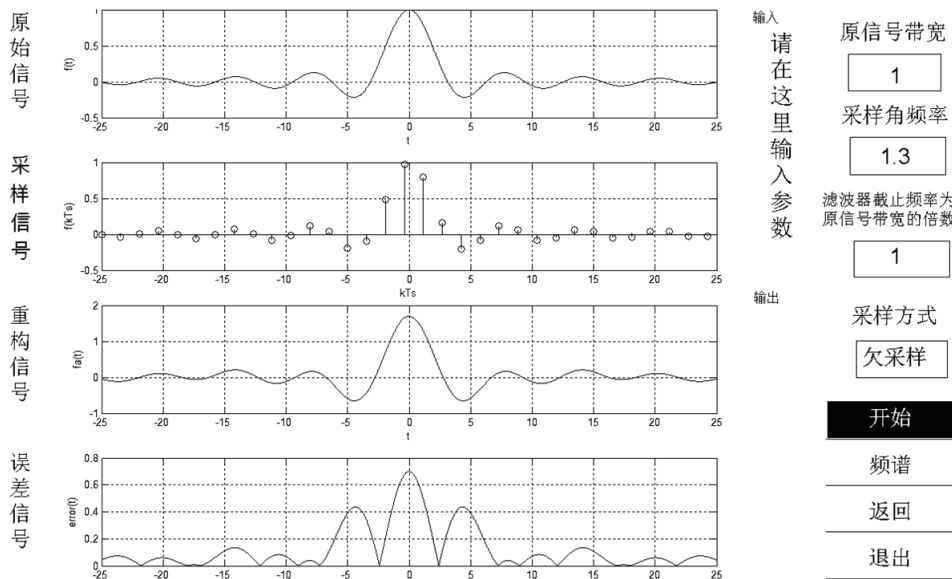


Figure 4. Under-Sampling
图 4. 欠采样

3 结论

由以上仿真结果可以看出, 当 $\omega_s > 2\omega_m$ 时, 此时为过采样, 由图 3 可以看出, 两信号的绝对误差已在 10^{-6} 数量级, 说明重构信号的精度已经很高^[4]。而当 $\omega_s < 2\omega_m$, 即欠采样, 此时是不满足取样定理的条件的, 由图 4 可见其误差信号已经很大, 因为它的取样频率不符合奈奎斯特频率, 那么频移后的各相邻频谱会发生混叠, 这样就无法再恢复原信号。另外, 一般来说经欠采样后再重构的信号失真, 其波形会和原始信号有较大差异, 而此例中欠采样后的重构信号在形状上与原信号相似, 但要注意的是其在幅值上与原信号有较大差异, 即产生了失真。这是由于 $Sa(t)$ 的频谱是一个门函数, 即使低通滤波器的带宽低于原信号频谱的带宽, 滤波后的频谱仍是一个门函数, 只是带宽不同。

将 MATLAB 环境引用到信号与系统课程教学中, 采用仿真软件的形式, 是基于 MATLAB 语言本身的功能, 并与信号与系统课程的特点相结合的结果。运用 MATLAB 的可视化功能, 通过图形用户界面 (Graphical User Interfaces-GUI) 制作了十分友好的人机交互界面, 让学生更加直观地看到信号的采样及重构波形, 有助于深刻地理解取样定理。在设计过程中

还生成了 EXE 格式的执行文件, 使其可脱离 MATLAB 环境在 PC 机上直接运行, 实现交互式教学, 激发了学生学习的积极性和趣味性, 改善了教学质量, 并提高了教学效率。

References (参考文献)

- [1] Wu Dazheng. Analysis of Signals and Linear Systems(4th Edition), Beijing: Higher Education Press, 2005.8
吴大正主编, 信号与线性系统分析 (第 4 版), 北京: 高等教育出版社, 2005 年 8 月
- [2] Liang Hong, Liang Jie etc, Signals and systems analysis and MATLAB implementation, Beijing: Electronic Industry Press, 2002.2
梁虹、梁洁、陈跃斌等, 信号与系统分析及 MATLAB 实现, 北京: 电子工业出版社, 2002 年 2 月
- [3] Zhou Xiangcai, Implementation of the signal sampling and reconstruction Based on MATLAB, Changzhou Institute of Technology, 2006, 6, Vol. 19, No. 3
周祥才, 基于 MATLAB 的信号采样与重构的实现, 常州工学院学报, 2006 年 6 月第 19 卷第 3 期
- [4] Su Bianling, Sampling Theorem and experimental teaching based on MATLAB, Journal of Sichuan Normal University (Natural Science) July, 2004, Vol. 27, No. 4
苏变玲, 取样定理及基于 MATLAB 的实验教学, 四川师范大学学报(自然科学版), 2004 年 7 月, 第 27 卷第 4 期
- [5] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab, Signals and Systems (Second Edition), Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2002.8
奥本海姆主编, 信号与系统 (第二版), 北京: 电子工业出版社, 2002 年 8 月,