

# Analytical and Computer-Aided Method for Kinematics of Spatial RSSR Mechanism

Hai-gang SUN<sup>1</sup>, Yong ZHOU<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>School of Mechanical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing, China

1. shgzzyx@163.com, 2. bitzhouy@bit.edu.cn

**Abstract:** Aiming at the computing complexity and complicated calculation procedures of Kinematics analysis by mathematical methods, a formula on the relationship between the two rotation angles of side link is derived which can expediently resolve the displacement of the driven link; through calculating successive derivatives of pertinent functions and variables other movement parameter value can also be acquired. Recurring to MATLAB, it is convenient to determine the structure motion modes and produce relative curves. In order to validate the correctness of above conclusion, virtual prototype technology is used to simulate and analyze the kinetic characteristic. After comparative analysis, the same result is obtained, which illustrates that this method can be applied to the kinematics analysis of spatial RSSR mechanism and has the pragmatic value for parametric analysis and design of the similar mechanism.

**Keywords:** spatial RSSR mechanisms; kinematics analysis; analytical method

## 空间 RSSR 机构运动分析的解析与辅助方法

孙海刚<sup>1</sup>, 周勇<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>北京理工大学机械与车辆学院, 北京市, 中国, 100081

1. shgzzyx@163.com, 2. bitzhouy@bit.edu.cn

**摘要:** 针对解析方法在空间 RSSR 机构运动分析过程中计算复杂、过程繁琐的问题, 通过算法研究给出了一种便捷求解从动件角位移的解析关系式, 进而可以采用解析方法进行从动件运动速度和加速度的计算。借助于 MATLAB 工具可以快捷地判别机构的运动型式, 获得机构的运动特性曲线。为了验证该方法的正确性, 采取了虚拟样机技术进行机构运动特性仿真。两种方法所得结果的对比分析表明, 二者具有相同的分析结果。该方法有效、快捷地实现了空间 RSSR 机构的运动特性分析, 对于该类机构的参数化设计与分析具有明显的实用价值。

**关键词:** 空间 RSSR 机构 运动分析 解析法

### 1 引言

空间机构具有结构紧凑、运动型式多样、工作可靠等特点。在许多场合下需要使用空间机构来实现预期的运动, 完成规划的功能。然而, 空间机构的运动分析和参数设计通常又是比较困难的。进一步研究空间机构运动分析的解析方法, 借助现代计算与分析工具的辅助手段, 对于空间机构的运动规划和参数设计有着极为重要的实践意义。

### 2 空间 RSSR 机构运动分析解析求解的一般方法

从系统观点来说, 对空间机构进行运动分析, 就

是求解一个机械系统的运动输入与输出关系, 或者说是在给定输入运动的条件下求解系统动态响应情况的过程。采用解析方法进行空间机构的运动分析, 需要首先选择合适的坐标系来描述空间构件的位形参数, 进而依据各构件之间的几何和约束关系表达主动件、从动件及其相关构件之间的三维运动联系。进一步通过解算和分析获得机构的运动特性。

按照求解思路, 解决空间机构运动分析问题的方法一般分为两类。一类与平面连杆机构的运动分析相似, 在空间直角坐标系中建立矢量闭环方程, 写出位移矩阵方程, 然后对其依次求导数, 解出待求的未知数。另一类称为拆杆拆副法, 在建立机构的分析方程时, 假想地将机构的环路从某个运动副处拆开, 或把

某个杆件拆掉，先按照其“自由运动”分别建立构件的运动方程，然后根据实际运动副或杆长或角度的几何约束条件，或称运动同一性条件建立关系式，再进行方程的求解<sup>[1]</sup>。

由于空间 RSSR 机构的运动关系主要体现在主、从动件之间的空间角位移变化关系，针对包含复杂三角函数关系的运动方程式的解算成为空间机构运动分析的难点。

### 2.1 拆杆拆副法的求解表达

如图 1 所示的一般空间 RSSR 机构中， $u_a$ 和 $u_b$ 分别为主、从动杆回转轴线的方向， $A$ 和 $B$ 是两个球面副， $\alpha$ 和 $\beta$ 代表两个连架杆的转角。如果不考虑连杆的约束，则  $A$  和  $B$  将分别绕 $u_a$ 和 $u_b$ 自由旋转。在此假设

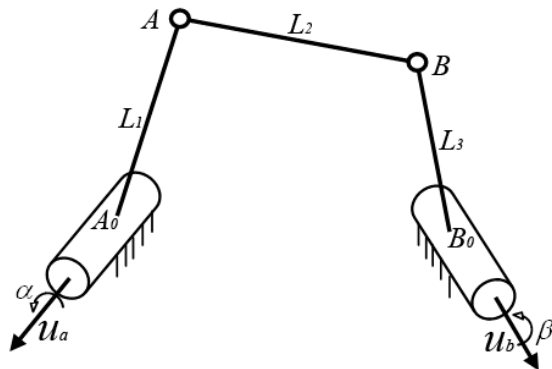


Figure 1. Motion analysis sketch of spatial RSSR mechanism  
图 1 空间 RSSR 机构的运动分析示意图

下建立  $A$  和  $B$  的旋转方程如下：

$$\begin{aligned} [A-A_0] &= [R_{\alpha}]_{u_a} [A_1-A_0] \\ \Rightarrow [A] &= [R_{\alpha}]_{u_a} [A_1-A_0] + [A_0] \quad (1) \\ [B-B_0] &= [R_{\beta}]_{u_b} [B_1-B_0] \\ \Rightarrow [B] &= [R_{\beta}]_{u_b} [B_1-B_0] + [B_0] \quad (2) \end{aligned}$$

其中： $A_1$ 和 $B_1$ 代表球面副  $A$  和  $B$  的初始位置点； $[R_{\alpha}]_{u_a}$ 是连架杆  $A_0A$  绕 $u_a$ 轴的旋转矩阵； $[R_{\beta}]_{u_b}$ 是连架杆  $B_0B$  绕 $u_b$ 轴的旋转矩阵，其一般形式详见参考文献<sup>[2]</sup>。

由于  $A$  和  $B$  之间必然受到连杆  $AB$  的约束，故存在方程：

$$[A-B]^T [A-B] = [A_1-B_1]^T [A_1-B_1] \quad (3)$$

联立方程(1)(2)(3)可以求解两个连架杆的转角位置关系，比如表达为下式：

$$E \cos \beta + F \sin \beta + G = 0 \quad (4)$$

其中：

$$\begin{aligned} E &= [A-B_0]^T [I-Q_{u_b}] [B_1-B_0] \\ F &= [A-B_0]^T [P_{u_b}] [B_1-B_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= [A-B_0]^T [Q_{u_a}] [B_1-B_0] + \frac{1}{2} [A_1-B_1]^T [A_1-B_1] \\ &\quad - [A-B_0]^T [A-B_0] - [B_1-B_0]^T [B_1-B_0] \end{aligned}$$

其中， $[Q_{u_a}]$ 和 $[P_{u_b}]$ 的数学表达式详见参考文献<sup>[2]</sup>。理论上讲，通过方程(4)可以求解连架杆  $B_0B$  的运动规律  $\beta = f(\alpha)$ ，或者连架杆  $A_0A$  的运动规律  $\alpha = \varphi(\beta)$ ，其中  $f$  和  $\varphi$  代表某种特定的函数关系式<sup>[3]</sup>。

### 2.2 空间 RSSR 机构的运动型式判别

对空间机构的运动分析，首先需要对机构的运动型式进行判别。按照上述“拆杆拆副”的分析方法，在尚不知道机构具体运动型式的情况下，需要对上述两个转角进行分别求解，根据解的连续性判断机构的运动型式。对于  $\beta = f(\alpha)$ ，如果  $\beta$  在  $\alpha$  的任意取值范围内都存在连续解，且其值位于  $(0, 2\pi)$  开区间内，则说明该机构是曲柄摇杆机构，且  $\alpha$  代表曲柄的角位移， $\beta$  代表摇杆的角位移。如果  $\beta$  的取值范围刚好为  $[0, 2\pi]$ ，则说明该机构是一个空间双曲柄机构。对于  $\beta = f(\alpha)$  关系式，如果存在无解区间，说明  $\alpha$  代表摇杆的角位移，还需要通过对  $\alpha = \varphi(\beta)$  采取类似的方法进行解的分析，以进一步判定机构的运动型式。当两个关系式同时存在无解区间时，表明该机构是一个空间双摇杆机构。

### 3 空间 RSSR 机构运动特性的解析求解

图 2 给出了直角坐标系下的典型空间 RSSR 机构的几何模型图。在该坐标系下，机构运动分析所用关键点的几何位置信息可表示如下：

$$\begin{aligned} A_0 &= (0, 0, N); \quad B_0 = (M, D, 0); \\ A_1 &= (L_1, 0, N); \quad B_1 = (M, L_3, 0). \end{aligned}$$

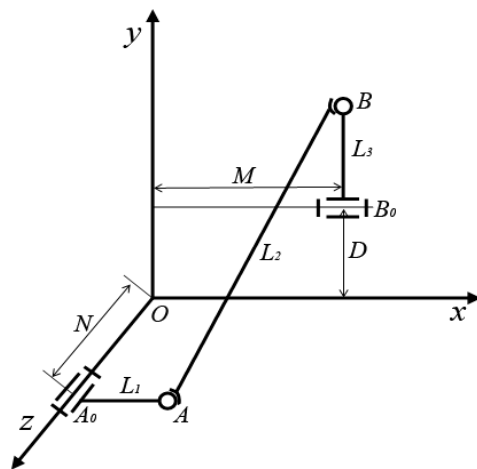


Figure 2. Spatial RSSR mechanism in 3D Cartesian coordinate system

图 2 直角坐标系下空间 RSSR 机构模型

### 3.1 主、从动杆转角运动关系式

杆件  $AA_0$  只绕  $z$  轴做旋转运动，末端位置  $A$  受  $L_1$  长度约束，故有：

$$[A]=[R_{\alpha z}][A_1-A_0]+[A_0] \quad \text{其中：}$$

$$[R_{\alpha z}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

杆件  $BB_0$  在空间中绕直线  $\begin{cases} y=D \\ z=0 \end{cases}$  旋转， $B$  的位置可以看成是在  $B_0(M, 0, 0)$  处先绕  $x$  轴旋转，然后沿  $y$  轴方向整体移动距离  $D$  的结果，也即增加一个位移矩阵  $[T]=[0; D; 0]$ ，故：

$$[B]=[R_{\beta x}][B_1-B_0]+[B_0]+[T], \quad \text{其中：}$$

$$[R_{\beta x}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (6)$$

由(5)和(6)可以求出假设  $A_1$  和  $B_1$  不受连杆约束的自由位置解：

$$\begin{aligned} A &= (L_1 \cos \alpha, L_1 \sin \alpha, N) \\ B &= (M, D+L_3 \cos \beta, L_3 \sin \beta) \end{aligned}$$

将  $A$  和  $B$  的自由位置解代入连杆的长度约束方程(3)，化简后，可得该空间机构两个连架杆转角位移关系式，即主、从动杆的运动关系式：

$$\begin{aligned} L_3 N \sin \beta + L_1 L_3 \sin \alpha \cos \beta - L_3 D \cos \beta \\ = \frac{1}{2} D^2 + L_1 (M - M \cos \alpha - D \sin \alpha) \end{aligned} \quad (7)$$

### 3.2 主、从动杆转角运动关系求解

针对方程(7)所给出的主、从动杆转角位移关系式，采用不同的求解方法，解算的繁简程度将存在很大的差别，在有些情况下甚至需要将获得的解再反向代入杆长约束方程(3)进行验证。为了尽可能地避免分类讨论影响后续的运动特性分析过程，本文利用三函数变换组合法，给出了一种适用于图2结构中参数  $M$  和  $N$  均不为0的一个可靠解。即首先将其简化为式(4)的形式，保证各个参量在选取除了限定值之外任何数值时都存在解的条件下，根据反正弦和反余弦可以在实数域内任意取值的思想，人为地将解的主要结构表示为反正弦或反余弦，对于含有无解区间的函数形式，尽量减少或避开机构有关参量的影响，这样可以获得方程(7)的如下显式解：

$$\beta = \sin^{-1} \frac{0.5D^2 + L_1(M(1 - \cos \alpha) - D \sin \alpha)}{L_3 \sqrt{N^2 + (L_1 \sin \alpha - D)^2}} - \tan^{-1} \frac{L_1 \sin \alpha - D}{N} \quad (8)$$

或

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{0.5D^2 + L_1 M + L_3 (D \cos \beta - N \sin \beta)}{L_1 \sqrt{M^2 + (L_3 \cos \beta + D)^2}} + \tan^{-1} \frac{L_3 \cos \beta + D}{M} \quad (9)$$

### 3.3 从动件运动速度、加速度求解

速度和加速度求解之前，需要根据式(8)和式(9)对机构的运动形态进行判定，以确定从动杆的位置，有针对性地分析机构的运动特性。在此仅给出  $AA_0$  为主动杆时的解( $BB_0$  为主动杆时的求解过程与  $AA_0$  相同)，为了得出机构速度和加速度分析的解析关系式，需要对定杆长约束方程(3)一阶、二阶求导，分别得出速度方程(10)和加速度方程(11)：

$$[\dot{A}-\dot{B}]^T [A-B]=0 \quad (10)$$

$$[\ddot{A}-\ddot{B}]^T [A-B] + [\dot{A}-\dot{B}]^T [\dot{A}-\dot{B}]=0 \quad (11)$$

由  $A$  和  $B$  的自由位置解对时间  $t$  进行一阶、二阶求导：

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{\alpha}(-L_1 \sin \alpha, L_1 \cos \alpha, 0) \\ \dot{B} &= \dot{\beta}(0, -L_3 \sin \beta, L_3 \cos \beta) \\ \ddot{A} &= \ddot{\alpha}(-L_1 \sin \alpha, L_1 \cos \alpha, 0) \\ &\quad + \dot{\alpha}(-L_1 \cos \alpha, -L_1 \sin \alpha, 0) \\ \ddot{B} &= \ddot{\beta}(0, -L_3 \sin \beta, L_3 \cos \beta) \\ &\quad + \dot{\beta}(0, -L_3 \cos \beta, -L_3 \sin \beta) \end{aligned}$$

一般情况下，主动杆的旋转运动是由电机驱动，

近似看作是匀速运动，故有：

$$\begin{aligned} \ddot{A} &= \ddot{\alpha}(-L_1 \cos \alpha, -L_1 \sin \alpha, 0) \\ A \text{ 和 } B \text{ 的位置解及其一阶导数代入(10)，得：} \\ \dot{\alpha} L_1 (M \sin \alpha - D \cos \alpha - L_3 \cos \alpha \cos \beta) \\ + \dot{\beta} L_3 (L_1 \sin \alpha \sin \beta - D \sin \beta - N \cos \beta) &= 0 \end{aligned}$$

解方程，得出该类型空间机构的速度解析式：

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha} \frac{L_1 (M \sin \alpha - D \cos \alpha - L_3 \cos \alpha \cos \beta)}{L_3 (L_1 \sin \alpha \sin \beta - D \sin \beta - N \cos \beta)} \quad (12)$$

$A$  和  $B$  的位置参数及其一、二阶导数代入(11)，得：

$$\dot{\alpha}^2 Q + \dot{\beta} R + \beta^2 S + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} T = 0$$

其中：

$$\begin{aligned} Q &= L_1 (M \cos \alpha + D \sin \alpha + L_3 \sin \alpha \cos \beta); \\ R &= L_3 (L_1 \sin \alpha \sin \beta - D \sin \beta - N \cos \beta); \\ S &= L_3 (L_1 \sin \alpha \cos \beta - D \cos \beta + N \sin \beta); \\ T &= L_1 L_3 \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

解方程，得出该类型空间机构的加速度解析式(13)：

$$\ddot{\beta} = \frac{\dot{\alpha}^2 Q + \beta^2 S + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} T}{R} \quad (13)$$

## 4 解析与辅助方法实例分析及其验证

任意假定一个机构，如图2所示，各变量的参数值分别为： $M=N=700\text{mm}$ ， $L_1=250\text{mm}$ ， $L_3=550\text{mm}$ ， $D=0\text{mm}$ ，主动杆的角速度  $10 \text{ rad/s}$ 。

为了便于 MATLAB 程序编制，对于图中的所有参数均采用变量的形式给出，最后统一赋予给定的值。这样既保证了程序和给定的公式具有通用性，也便于对相类似的结构直接进行对比分析。

### 4.1 基于解析方法的运动特性求解

在 MATLAB 平台中定义机构的各项参量，编写解析式(8)和(9)。利用循环程序分别判断两个公式在自变量一个圆周内其解的连续性以及连续解的取值区间。代入给定的已知量，可以判定设定的机构只满足式(8)，并且该结构为曲柄摇杆机构， $A_0A$  是机构的曲柄， $B_0B$  为机构的摇杆。通常定义曲柄为主动杆，摇杆为从动杆。因此，空间机构运动分析的内容既转化为解算和分析从动杆  $B_0B$  的运动特性。按照解析式(8)，借助 MATLAB 平台便可以做出该机构运动的三维位形图，以及从动杆转角位移的二维时域变化曲线，如图 3 所示。

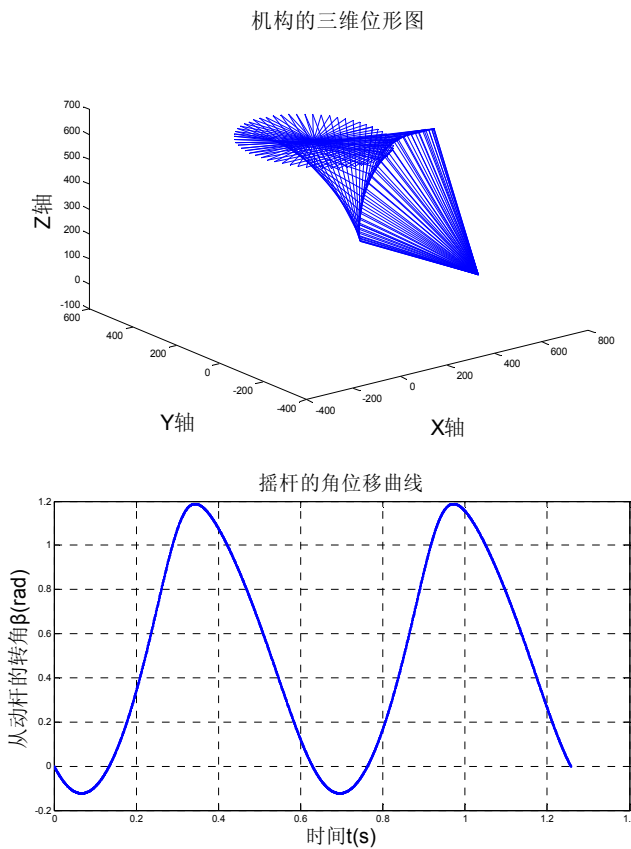


Figure 3. 3D motion configuration diagram and output curve  
图 3 机构的三维位形图及位置关系曲线

采取相同的办法，按照从动杆速度和加速度解析式(12)、(13)，直接代入相应的参数值便可计算从动杆摆动角运动的速度、加速度等运动特性。在 MATLAB 平台中将这此运动特性关系式、参数条件等程序化，调用 MATLAB 绘图函数，就可以直接获得该机构从动杆摆动的速度和加速度曲线，如图 4 所示。

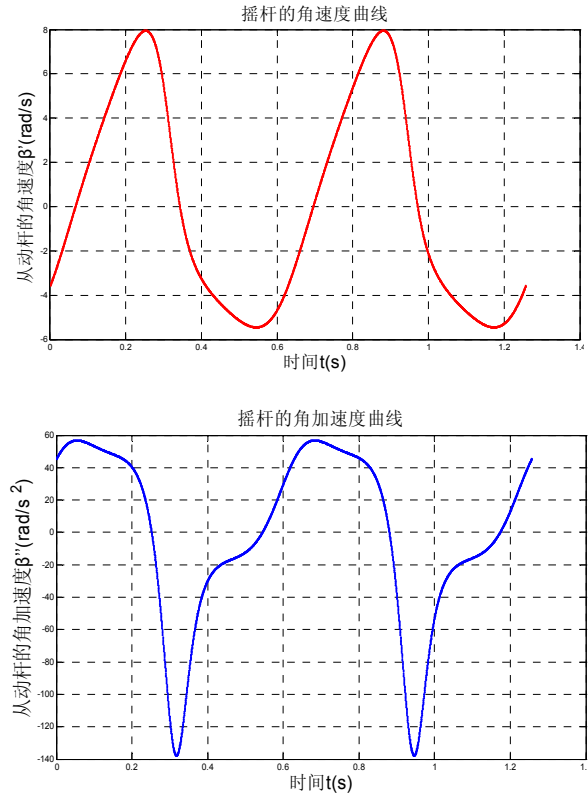


Figure 4. Curve: Angular velocity and acceleration of driven bar  
图 4 机构的角速度和角加速度曲线

### 4.2 基于 ADAMS 的机构运动仿真分析与验证

为了验证上述解析方法的正确性，可以采取虚拟验证机技术进行仿真分析，通过对比分析任意给定机构运动参数的求解结果与运动仿真结果，可以确认求解方法的正确性与有效性。

按照图 2 及上述给定尺寸建立该空间 RSSR 机构的虚拟样机。首先在 Solidworks 平台中建立机构的部件和装配体模型，如图 5a)，并将装配体保存为“parasolid”格式，转换为“\*.x\_t”后导入到 ADAMS 平台中。为了顺利地对该机构进行运动仿真，需要重新定义 Marker 点，材料属性，运动副等元素[4]。调用内嵌的仿真引擎 ADAMS/Solver，求解机构方程，直接计算出角位移，角速度和角加速度。借助于 ADAMS/Postprocessor 模块绘制曲线图，直观地反映机构运动参数的动态特性，如图 5 b)、c)、d)。通过分析比较，两者在动态特性分析的分析结果方面高度一致，有力地验证了上述解析求解方法在机构运动特性分析中的正确性、可靠性和有效性。

值得说明的是，实际的结构由于加工、装配、测量误差等因素的影响，使其不能精确地按照理论所给

模型的位置方式布置，致使位移、速度和加速度等运动参数在其它方向产生分量，不能按照理想的方位分布，而且实际的运动不可避免地受到摩擦、弹性变形、惯性力等因素的影响，使其实际参数值会与理论分析结果存在一定的误差。表(1)给出了前述模型空间 RSSR 机构的实际运动参数值与理论分析结果对比情况，供实际应用时参考。

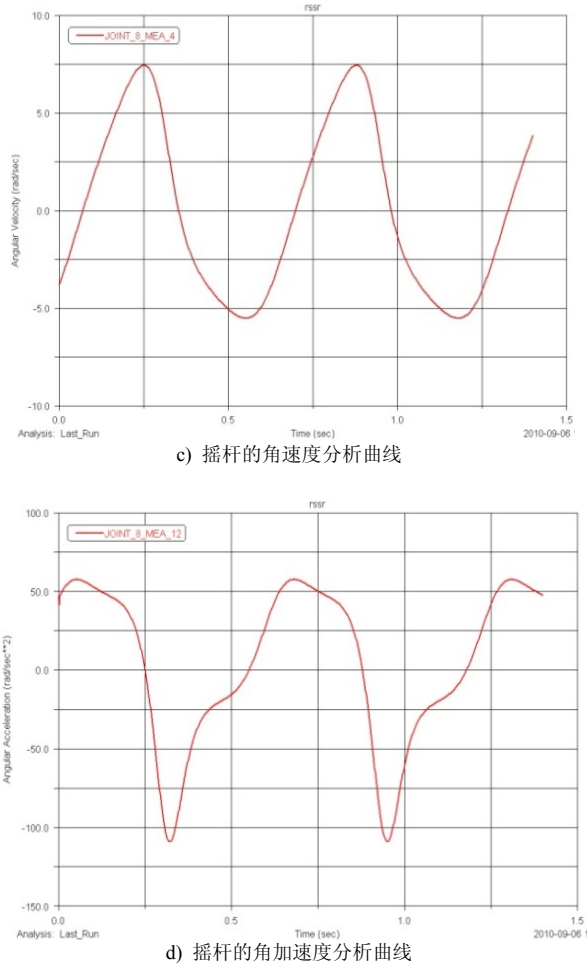
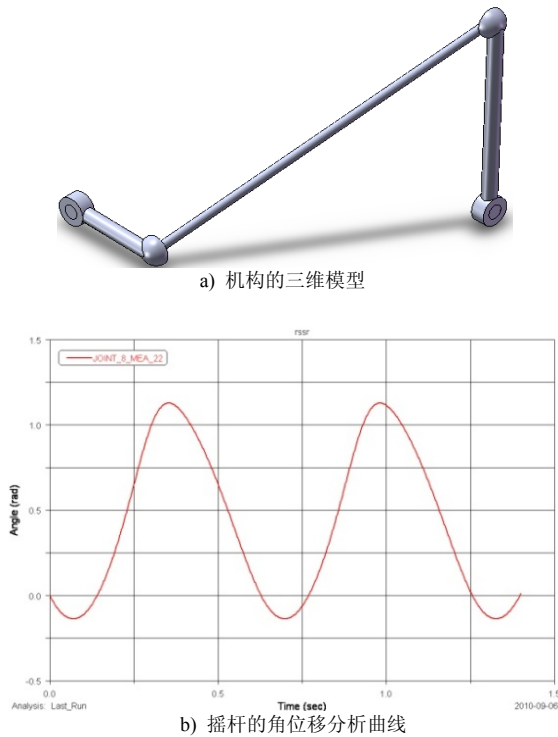


Figure 5. Simulation: motion analysis  
图5 机构的运动仿真

Table 1. Comparison: motion error between computed value and practical value  
表(1) 空间 RSSR 机构实际运动分析与理论分析结果对照表

项目	计算值		实测值		误差值		计算副值	实测副值	副值误差	误差百分比		
	低谷	高谷	低谷	高谷	低谷	高谷				副值	低谷	高谷
角度	-0.1222	1.189	-0.1266	1.1386	0.0044	0.0504	1.3112	1.2652	-0.046	-4%	-4%	4%
角速度	-5.445	7.96	-5.4115	7.5499	-0.0335	0.4101	13.405	12.9614	-0.4436	-3.31%	1%	5%
角加速度	-137.6	56.92	-131.0362	55.5197	-6.5638	1.4003	194.52	186.5559	-7.9641	-4%	5%	2%

单位：角度 (rad)，角速度 (rad/s)，角加速度 (rad/s<sup>2</sup>)

### 5 结束语

空间 RSSR 机构的运动特性分析，是空间机构设计和运用的基础。有效而又快捷地判别给定结构尺寸的空间 RSSR 机构的运动型式，准确、快捷地获得给定驱动输入条件下从动构件的位移、速度及加速度等运动特性，既是工程实践的实际需要，也是一般解析方法期望实现却又很难实现的目标。本文通过巧妙求解空间 RSSR 机构主、从动构件的运动关系式，在结构参数  $M$  和  $N$  均不为 0 的条件下获得了一种便捷求解

从动件角位移的解析关系式。在此基础上，进一步获得了从动件运动速度和加速度的解析表达式。借助于 MATLAB 平台，可以迅速判别机构的运动型式，获得从动件的运动特性曲线，进而形成了本文所谓解析与辅助方法。采取虚拟样机技术，通过对给定尺寸空间 RSSR 机构三维实体建模和 ADAMS 刚体运动特性仿真分析，既为空间机构的运动特性分析本身提供了一种有效的方法，对比分析两种方法所得出的结果，在本文中又起到了验证该解析方法正确性的作用。运动

特性分析以数学解析式的方式给出，这为机构的参数化设计与分析提供了高效、可靠的计算分析手段。

### References (参考文献)

- [1] Miao Hongbin, Qiao Fengli, Kinematics Characteristics Analysis Research of Spatial RSSR Mechanisms [J], *Machinery design and manufacture*, 2008, (2), P7-9 (Ch).  
苗鸿宾, 乔峰丽, 空间 RSSR 机构运动分析的研究[J], *机械设计与制造*, 2008, (2), P7-9.
- [2] CAO Weiqing, XU Zengyin. Mechanism Design [M]. Beijing: China Machine Press, 2000.112-113.  
曹惟庆, 徐曾荫. 机构设计第 2 版[M].北京:机械工业出版社, 2000.112-113.
- [3] ZHANG Chunlin, YU Yueqing. Advanced Mechanisms [M]. Beijing: Publishing House of Beijing Institute of Technology, 2006.63-78.  
张春林 余跃庆. 高等机构学[M].北京:北京理工大学出版社, 2006.63-78.
- [4] Zhou Ting, Kinematic Analysis of Blender Using ADAMS [J], *Modern Machinery*, 2009,(1),P68-79 (Ch).  
周婷, 基于 ADAMS 的搅拌机运动分析[J], *现代机械*, 2009, (1), P68-79.