Solving Integer Programming Based on Maximum Entropy Social Cognitive Optimization Algorithm

Caixia Fan
Department of modern management, Zhengzhou Occupation Technology College, Zhengzhou, 450121, China
Email: 410399636@qq.com

Abstract: To solve a class of integer programming (IP), this paper proposed a new method called maximum-entropy social cognitive optimization algorithm. First, integer programming problems were transformed into equivalent non-integer programming (NIP) problems，and a smoothing approximation to the inequality constraints was given by the maximum-entropy function, furthermore, integer programming can be transformed into unconstrained optimization, then using the social cognitive optimization to solve this problem. The objective function of the algorithm does not require analytical nature and easy to achieve, numerical results show that the method is effective in solving complementarity problem.

Keywords: social cognitive optimization; integer programming; maximum entropy method

求解整数规划问题的极大熵社会认知算法

樊彩霞
郑州职业技术学院现代管理系，河南郑州, 450121
Email: 410399636@qq.com

摘　要：针对整数规划问题，给出了一个新的算法——极大熵社会认知算法。首先通过把整数规划问题都转化成等价的非整数规划问题，采用极大熵函数对非整数规划的约束条件进行处理，进而把非整数规划问题化为无约束优化，利用社会认知算法对其进行求解。该算法对目标函数的解析性质没有要求且容易实现，数值结果表明了该方法在求解整数规划问题中的有效性.

关键词：社会认知算法；整数规划；极大熵方法

1 引言

整数规划(Integer Programming,IP)和混合整数规划(Mixed Integer Programming, MIP)问题是 20 世纪 60 年代发展起来的规划论中的一个分枝，是数学规划中常见的、复杂的一大类问题[1],其广泛应用于许多工程领域,如资源管理、生产调度、可靠性优化、目标分配、超大规模集成电路设计等. 并且大多数的组合优化问题都可以写成一个 IP 或 MIP 问题,如背包问题、旅行商问题、最短路问题、选址问题等[2]，因此如何求解 IP 和 MIP 问题是一个重要的研究领域. 许多快速求解非整数规划的算法，如变尺度法、内点法、罚函数法、信赖域法等[3]，这些算法具有良好的收敛性和收敛速度快等特点,可用于大规模问题的求解,但遗憾的是不能将这些方法用于求解 IP 和 MIP 问题.

多年来的研究表明，整数规划是数学规划和运筹学中最困难的研究领域之一. 即使是形式上看起来很简单的线性约束二次整数规划问题在全空间上求解也是不可判定的，即不存在求解该问题的算法. 整数规划却属于典型的 NP 难解问题,一般不存在多项式算法[4]. 总体上说，求解整数规划问题的方法到目前为止还不多，现有的算法可分为三类：(1)化为等价问题. 其中主要包含化为连续优化问题的方法和线性化为线性整数规划问题的方法. (2)分支定界法. 对目标函数和约束函数是可定界的非线性整数规划问题，这种方法是适用的. (3)近似方法. 近似方法是为了尽快找到问题的好的，但未必是最优解而设计的方法，它主要包括随机方法和局部搜索方法.

近年来随着进化计算的发展,许多学者运用遗传算法[5-6]、演化算法[7]、粒子群[8-9]等方法求解整数规划问题,获得了较好的效果. 社会认知算法也是一种群体智能算法，该算法(Social Cognitive Optimization, SCO)是 Xie

978-1-935068-40-2 © 2010 SciRes.

于 2002 年提出的一种群体智能算法[10-11]. 社会认知优化算法是一种基于社会认知理论的集群智能优化算法，它对目标函数的解析性质没有要求，适合于大规模的约束问题的处理，该算法已经表现出了良好的效果[12-13]. 本文通过把整数规划问题都转化成等价的非整数规划问题, 采用极大熵函数对非整数规划的约束条件进行处理, 进而把非整数规划问题化为无约束优化, 利用社会认知算法对其进行求解. 该算法是基于社会认知理论, 通过一系列的学习代理来模拟人类的社会性以及智能性从而完成对目标的优化. 该算法对目标函数的解析性质没有要求且容易实现, 数值结果表明了该方法在求解整数规划问题中的有效性.

2 问题的转化

2.1 整数规划问题都转化成等价的非整数规划

本文仅考虑如下不等式约束的优化问题：

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\min f(x)\\ s.t.\quad h_i(x)\le 0, i=1,2,\cdots,l\\ \qquad x\in X\end{cases}$$

其中各个分量 $f(x), h_i(x)$ 均为 n 维向量 x 的函数，如果 X 是整数点集, 则称(P)为整数规划 IP; 如果 X 中部分分量是整数, 则称(P)为混合整数规划 MIP; 如果 X 中所有元素均取 0 或 1 值, 则称(P)为 0-1 规划. 若用两个不等式代替一个等式, 就可以把等式约束转化为不等式约束.

由于条件 $x_i\in\{0,1\}$ 等价与条件 $x_i(1-x_i)=0, 0\le x_i\le 1$，所以 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 能被转换为一个连续变量.因此任何一个 0-1 规划问题都可以转化为一个等价的非整数规划问题(NIP)，即等价的 NIP 的最优解也是 0-1 IP 的最优解.

定理 1 如果在 X 中取整数的变量有界,则整数规划问题或混合整数规划问题都可以转化为一个等价的非整数规划.

证明 设 x_k 是一个整数变量, 因 x_k 有界, 不妨设 $0\le x_k\le L$,那么 x_k 可以表示成一个 2 进制数,即

$$x_k=y_0 2^0+y_1 2^1+\cdots+y_s 2^s,$$

其中 $s=[\log_2 L]+1, y_k=0$ 或 $1(k=1,2,\cdots,s)$.因此整数变量可以转化为仅取 0 或 1 的变量,于是整数规划就可以转化为等价的 0-1 规划, 结合任何一个 0-1 规划问题都可以转化为一个等价的非整数规划问题(NIP),因此定理 1 结论成立.

我们还可以给出另一种转化形式来证明定理 1 成立. 设 x_k 是一个有界的整数变量,即 $x_k\in[a_k,b_k]$ 中的整数,这里 a_k,b_k 都为整数,则有下面的非整数规划问题(NIP):

$$\begin{cases}\min f(x)\\ s.t.\ \ h_i(x)\le 0, i=1,2,\cdots,l\\ \qquad (x_k-a_k)(x_k-(a_k+1))\cdots(x_k-b_k)=0, k=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

这里给出了 IP 和 M IP 转化为非整数规划的两种方法, 即连续化的方法[14]. 当转化后的目标函数和约束全部可微时, 我们便可用现有的许多算法求解转化后的问题. 下面结合极大熵方法给出一种将转化后的等价问题进一步化为无约束优化问题的求解方法.

2.2 极大熵方法化非整数规划为无约束优化

这里我们总认为已将整数规划转化为下面的非整数规划问题

$$(\mathrm{NIP1})\begin{cases}\min f(x)\\ s.t.\quad g_i(x)\le 0, i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

显然(NIP1)问题的约束集合等价于极大值等式约束 $g(x)=\max\{g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x)\}\le 0$，而函数 $g(x)$ 是不可微的，因此给一些数值计算上带来了困难. 下面我们引进极大熵函数

$$g_p(x)=(1/p)\ln\sum^m\exp(pg_i(x)),$$

其中 $p>0$ 为控制参数；关于极大熵函数的导出读者可以参考文献[15]，极大熵函数也称凝聚函数，该函数从数学上是以原来函数 $g_i(x)$ 的指数函数构成向量函数的 L_p 范数的自然对数. 先头的指数变换使向量的各分量为正，后面的对数变换使函数值复原. 简单运算可以证明,函数 $g(x)$ 与 $g_p(x)$ 具有如下关系:

$$g(x)\le g_p(x)\le g(x)+\frac{1}{p}\ln m.$$

由此可知，只要参数 p 充分大时，就可以用极大熵函数 $g_p(x)$ 直接代替极大值函数 $g(x)$，从而将原来的不可微约束问题转化为一个可微的优化问题. 虽然 p 取有限值时仅能得到原问题的近似解，但只要 p 取得适当大就能保证很高的精度. 为了避免计算 p 过大出现上溢，我们可取如下 $g_p(x)$ 的等价形式

$$g_p(x)=g(x)+\frac{1}{p}\ln\sum_{i=1}^m\exp\{p[g_i(x)-g(x)]\},\ (p>0).$$

于是问题(NIP1)转化为如下约束优化问题

$$(\text{NIP2})\begin{cases}\min f(x)\\ s.t.\ \ g_p(x)=(1/p)\ln\sum_{i=1}^{m}\exp(pg_i(x))\le 0\end{cases}$$

采用乘子罚函数法进行求解,问题(NIP2)可以转化为下列无约束优化问题:

$$(\text{NP})\ \ \min\ \ \Phi_p(x,\alpha)=f(x)+\alpha g_p(x)+cg_p^2(x)/2$$

这里 α 为拉格朗日乘子，c 为惩罚因子，α 值按照 $\alpha^{k+1}=\alpha^k+cg_p(x^k)$ 进行修正.

下面我们考虑用社会认知优化算法（SCO）求解无约束优化问题 $\min\Phi_p(x,\alpha)$.

3 社会认知优化算法

社会认知优化是基于社会认知理论(Society Cognitive Theory)发展起来的一种智能优化算法. 社会认知理论认为人格是综合遗传、环境和认知而形成的，特别重视环境和认知的作用，强调人际之间社会学习的重要性. 社会认知优化是通过竞争选择和领域搜索来模拟社会认知理论中的社会学习能力，用代理来代表社会中的人，用知识库来代表社会中的知识，通过代理与知识库之间不断的交互来模拟人类的社会学习过程，从而达到优化学习的目的.

3.1 社会认知算法的相关概念

知识点(Knowledge point)：知识点是位于搜索空间中对位置 $\vec{x}$ 及其适应度水平的描述所构成的点.

库(Library)：库是含有一系列知识点且具有大小的表.

学习代理(Learning agent)：学习代理是一个行为个体，支配库中的知识点.

领域搜索方法(Neighborhood searching)：以 $\vec{x_1}$ 作为参考选出一个新的点 $\vec{x'}$ ，$\vec{x'}=\vec{x_{1,d}}+2*Rand()(\vec{x_{2,d}}-\vec{x_{1,d}})$. $Rand()$ 是 $(0,1)$ 之间的随机数，$\vec{x_1}$ 和 $\vec{x_2}$ 是分别定义为参考点和中心点.

3.2 社会认知优化算法的具体实现过程如下：

假设库中知识点为 N_{pop} ，学习代理的数量是 N_c ，一般选择 $N_{pop}=3N_c$.

步骤 1 初始化过程

(a)随机生成 N_{pop} 个知识点；

(b)给每个学习代理分别随机分配库中不同的知识点.

步骤 2 替代学习过程

(a)模仿学习：在库中随机选择两个不同的知识点，采用竞争的原则在这两个知识点中选出一个好的知识点；

(b)观察学习：把选择出来的知识点和代理自身的知识点进行对比，取水平较好的点作为中心点，取较差的点作为参考点，基于领域搜索的原则将这两个点移动到一个新的知识点，储存新的知识点.

步骤 3 从库中去掉 N_c 个最差水平的知识点.

步骤 4 重复步骤 2 到步骤 4，直到满足停止条件.

4 社会认知算法求解整数规划

对给定的整数规划，按照上述方法把原问题转化为无约束优化问题 $\min\Phi_p(x,\alpha)$ ，应用社会认知优化算法来求解该无约束优化问题.

求解整数规划问题的社会认知算法

步骤 0 由给定的整数规划问题，构造相应的适应度函数 $\min\Phi_p$ ， $k:=0$ ，给定一个精度 ε ；

步骤 1 给定 p 是一个充分大的常数；

步骤 2 用社会认知优化算法求解 $\min\Phi_p(x,\alpha)$ ，得到 x_k ；

步骤 3 若满足要求，则停止，得到近似最优解 $x^*=x_k$ ；否则修正 p 的值，并令 $k:=k+1$ ，返回步骤 2.

5 数值试验

为了测试本文算法的求解性能，下面我们取文[14]中非线性整数规划问题做测试，并和文[14]的结果进行比较.

算例 1 （本例在文献[14]中用作测试函数）

$$\begin{cases}\min f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-4)^2\\ s.t.\ \ -x_1+x_2+x_3\le 3.5\\ \quad x_1+x_2-x_3\le 6\\ \quad x_1,x_2,x_3\text{为}\ge 0\text{的整数}\end{cases}$$

容易求的 $0\le x_1\le 6$, $0\le x_2\le 3.5$, $0\le x_3\le 3.5$, 因此该整数规划可以转化为如下非整数规划:

$$\begin{cases}\min f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-4)^2\\ s.t.\ \ -x_1+x_2+x_3\le 3.5\\ \quad x_1+x_2-x_3\le 6\\ \quad x_1(x_1-1)(x_1-2)\cdots(x_1-6)=0\\ \quad x_2(x_2-1)(x_2-2)(x_2-3)=0\\ \quad x_3(x_3-1)(x_3-2)(x_3-3)=0\end{cases}$$

978-1-935068-40-2 © 2010 SciRes.

采用上述方法进行求解,取参数 $p=1\times10^6$.社会认知算法运行的参数如下：

$$N_{pop}=350, N_c=70, T=1000.$$

对算例 1 进行 100 次计算限于篇幅，本文给出社会认知算法运行 10 次的结果如表 1 所示. 为便于比较，表 2 也给出了文献[14]的求解结果.

Table 1. Results for this algorithm running 10 times
表 1. 本文算法运行 10 次的结果

No	k	x_1	x_2	x_3
1	621	1.000 001 411 1	1.000 007 082 4	3.001 302 043 9
2	468	1.000 001 314 9	1.000 001 152 5	3.000 302 034 0
3	453	2.000 001 214 3	2.000 001 143 5	3.020 302 011 8
4	569	1.000 001 345 0	1.000 001 910 7	3.040 302 036 5
5	271	2.000 001 671 4	2.000 001 829 1	3.001 302 039 3
6	379	1.000 001 921 8	1.000 001 555 4	3.002 302 059 1
7	564	1.000 001 230 0	1.000 001 135 4	3.040 302 001 2
8	297	2.000 001 358 3	2.000 001 334 5	3.005 302 003 8
9	769	1.000 001 456 5	1.000 001 149 1	3.040 302 045 8
10	871	1.000 001 435 1	1.000 001 916 3	3.010 302 086 9

Table 2. Comparison of results
表 2. 计算结果的比较

算法	参数 p	初始点 x^0	最优解 x^*	$f(x^*)$
文献[14]	-/-	$(8,8,\cdots,8)$	(2, 2, 3)	2
本文	$1*10^6$	-/-	(1, 1, 3)搜到 7 次 (2, 2, 3)搜到 3 次	2.001 302 2.004 104

数据分析：因为文献[14]都是确定性算法，因此文献[14]只能获得初始点附近的一组解. 结合表 1 和表 2 可以看出：本文的结果整体比文献[14]好，算例 1 的两组解 $x_1^*=(1,1,3)^T$；$x_2^*=(2,2,3)^T$ 都搜索到了，且本文算法的精确度高. 已有文献中只得到了该问题的一个解，主要是因为确定性算法是用给定初始点进行搜索的，因此无法同时搜到原问题的所有可能解，而本文算法中的初始点是随机的，因此通过 10 次搜索就有可能获得原问题尽可能多的最优解.

6 结束语

本文通过把整数规划问题都转化成等价的非整数规划问题，结合极大熵函数法，给出了此类问题的一种新的有效算法——社会认知算法来搜索最优解. 该算法无需使用初始点和导数信息，这不但给整数规划问题的求解提供了一种新方法，而且拓广了社会认知优化算法的应用范围. 利用这种社会性算法做整数规划问题实验结果表明，社会认知优化算法计算准确，成功率高，是求解此类问题的一种有效算法. 在实际中，许多问题的变量都是有界的，但有时变量有界明确给出，因此，我们可以通过约束来求出或估计变量的上下界,一般很容易求出线性整数规划的变量的界。对于无界变量的 IP 和 M IP 问题还有待于进一步研究。

References (参考文献)

[1] Grossmann IE, Sahinidis NV. Special issue on mixed integer programming and it's application to engineering, Optim. Eng, 3(4) [M]. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2002.
[2] Sandgren E. Nonlinear integer and discrete programming in mechanical design[J]. ASME Journal Mechanical Design, 1990, 112(2): 223-229.
[3] 希梅尔布劳 D M. 实用非线性规划(中译本)[M]. 北京:科学出版社,1981
[4] 邢文训, 谢金星. 现代优化计算方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
[5] Ming-yue WANG, Xiao-guang GAO. A MODIFIED GENETIC ALGORITHM FOR SOLVING NONLINEAR HYBRID OPTIMIZATION PROBLEM.[J].Information and Control,2002,31(4):363-366.
[6] Jian-rong FENG, Zhi-he LIU, Zheng-he LIU.A Mixed Integer Genetic Algorithms for Solving the Mixed Integer Programming Problems and Simulation Implementing[J].JOURNAL OF SYSTEM SIMULATION,2004,16(4):845-849.
[7] Zhuo-KANG, Yan LI, Pu LIU etc. AN ALL-PURPOSE EVOLUTIONARY ALGORIEHM FOR SOLVING NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS.[J].JOURNAL OF COMPUTER RESEARCH AND DEVELOPMENT, 2002, 39(11): 1471-1477.
[8] Zhao-LIU, Li-shan KANG, Liang-xiao JIANG etc. New PSO Algorithm for MINLP PROBLEMS[J].MINI-MICRO SYSTEMS,2005,26(6):991-994.
[9] Ying TAN, Hui-min GAO, Jian-chao ZENG. Particle Swam Optimization for Integer Programming[J].系统工程理论与实践,2004,24(5):126-129.
[10] Xie X F, Zhang W J, Yang Z L. Social cognitive optimization for nonlinear programming problems[C].Beijing, China: Int Conf on
[11] Machine Learning and Cybernetics, 2002:779-783.
[12] Xie X F, Zhang W J. Solving engineering design problems by social cognitive optimization[J].Genetic and Evolutionary Computation Conference, 2004:261-262.
[13] Jun-xia SU. The Social Cognitive Optimization Applied in Nonlinear Programming Problems [J]. 计算机仿真, 2007, 24(9): 261-264.
[14] Jian-ke ZHANG, Jia-ze SUN, Xiao-li KOU. Social Cognitive Optimization for fractional programs [J]. Computer Engineering and Design, 2008, 29(21): 5543-5545.
[15] Zhi-qing MENG, Qi-ying Hu, Xiao-qi YANG. A Method of non-linear penalty function for solving integer programming and mixed integer programming[J].Control and Decision,2002,17(3):310-315.
[16] 李兴斯. 解非线性规划的凝聚函数法[J].中国科学(A 辑) . 1991, 12 :1283-1288.