

China's Population Growth Model Based on Grey System Theory and Logistic Model

Shiqiang Zhang¹, Salan Zhang², Zheng Jiang¹

¹Dept. of mathematics, Chongqing Medical University, Chongqing, China

²Ping An Asset Management Co. Ltd, Ping An Insurance (Group) Company of China ,Ltd, Shanghai, China

math808@sohu.com, zhangsalan@yahoo.com.cn

Abstract: Based on the grey system theory and the logistic model, this paper presents a analysis method of population growth trends. The analysis method of population growth trends based on the grey system theory and the logistic model not only has simple modeling procedure, but also the grey system GM(1.1) model of population growth trends that the analysis method of population growth trends based on the grey system theory and the logistic model set up has better precision than the grey system GM(1.1) models of population growth trends that other methodologies set up. Using the analysis method of population growth trends based on the grey system theory and the logistic model, together with the actual situation, this paper established a gray logistic model of Chinese population growth. Empirical analysis shows that China's population growth model based on the grey system theory and the logistic model can predict the growth trend in China.

Keywords: grey system; logistic model; population growth model

基于灰色系统理论与 logistic 模型的中国人口增长模型

张世强¹, 张飒岚², 蒋 峰¹

¹重庆医科大学数学教研室, 重庆, 中国, 400016

²中国平安保险(集团)股份有限公司平安资产管理有限责任公司, 上海, 中国, 201201

math808@sohu.com, zhangsalan@yahoo.com.cn

摘 要: 基于灰色系统理论与 logistic 模型, 给出了一种人口增长趋势的分析方法。利用该分析方法, 结合我国的实际情况, 建立了一个中国人口增长的灰色 logistic 模型。实证分析表明, 基于灰色系统理论与 logistic 模型的中国人口增长模型较好地预测了我国的增长趋势。

关键词: 灰色系统; logistic 模型; 人口增长模型

1 引言

统计数据表明, 世界人口 1800 年达到 10 亿, 1930 年达到 20 亿, 1960 年达到 30 亿, 1974 年达到 40 亿, 1987 年达到 50 亿, 1999 年达到 60 亿。据法国国家人口研究所的统计, 世界人口 2005 年 12 月 19 日突破 65 亿, 预计将在 1012 年到 2013 年间突破 70 亿。联合国预测世界人口 2050 年将突破 90 亿。

联合国 2005 年 3 月公布的一份研究报告称, 过去 50 年间世界人口的持续增长和经济活动的不断扩展对地球生态系统造成了巨大压力。人类活动已给地球上 60% 的草地、森林、农耕地、河流和湖泊带来了消极影响。近几十年来, 地球上五分之一的珊瑚和三分之一的红树

林遭到破坏, 动物和植物多样性迅速降低, 三分之一的物种濒临灭绝。

1953 年, 我国人口总数为 6 亿多, 1964 年为 7.2 亿, 1982 年为 10.3188 亿, 1990 年达 11.6002 亿, 2000 年达 12.9533 亿^[1]。近年来, 由于计划生育成效显著, 人口的自然增长率明显下降, 但由于人口基数大, 每年仍净增人口 1500 多万。

由于人口数量多, 人均资源数量相对越来越少, 我国耕地、森林、草场等资源的绝对数量都居世界前列, 但人均资源的数量很少。如我国人均耕地仅为 0.09 公顷, 相当世界平均水平的 1/4; 我国森林覆盖率为 13.94%, 低于世界平均水平的 30%; 我国江河径流量人均仅有 2450 立方米, 相当于世界人均水平的 23.5%, 我国

多种矿产资源的人均占有量仅为世界的 1/3。由于人口数量多,不仅造成人均资源的数量很少,而且造成住房、教育、就业等方面的很大压力。每年新增加的国民生产总值有相当一部分被新增加的人口所抵消,从而造成社会再生产投入不足,严重影响了国民经济的可持续发展。因此,认真分析研究我国目前的人口发展现状和特点,采取切实可行的措施控制人口的高速增长,已经成为我国目前经济发展中需要解决的首要问题。本文基于灰色系统理论与 logisitic 模型,给出了一种人口增长趋势的分析方法。利用该分析方法,结合我国的实际情况,建立了一个中国人口增长的灰色系统 logisitic 模型。实证分析表明,基于灰色系统理论与 logisitic 模型的中国人口增长模型较好地预测了我国的增长趋势。

2 原理与方法

2.1 逻辑斯蒂(logisitic)生物种群模型

考虑自然资源和环境对生物种群的影响,以 K 记自然资源和环境条件所能允许的最大生物种群数。把生物种群增长的速率除以当时的生物种群数称为生物种群的净增长率。

荷兰数学家威赫尔斯特(Verhulst)提出一个假设:生物种群的净增长率随着 $N(t)$ 的增加而减小,且当 $N(t) \rightarrow K$ 时,净增长率趋于零。因此生物种群增长的方程可写成

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(1 - \frac{N(t)}{K})N(t) \quad (1)$$

其中 r 表示生物种群 $N(t)$ 的内禀增长率。

上面的微分方程称为逻辑斯蒂(logisitic)生物种群模型。逻辑斯蒂模型在生物种群总数分析中有其广泛的应用。条件是只要在某种特定自然环境中该生物种群是独立生存的,或与其它生物种群相比,该生物种群占有绝对优势。

解上面的微分方程得

$$N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - N_0}{N_0} e^{-r(t-t_0)}} \quad (2)$$

其中 N_0 为时间 $t = t_0$ 时的生物种群数, r 表示生物种群 $N(t)$ 的内禀增长率, K 为自然资源和环境条件所能允许的最大生物种群数。 N_0 为时间 $t = t_0$ 时的生物种群数。 N_0 对模型是有不可忽视的影响的。

为讨论问题的方便,不少应用逻辑斯蒂(logisitic)

生物种群模型的文献均将 N_0 作为常数来处理,其结果是影响到逻辑斯蒂(logisitic)生物种群模型的精度。

为了解决这个问题,可将逻辑斯蒂(logisitic)生物种群模型(2)改造为如下的逻辑斯蒂(logisitic)生物种群模型。

$$N(t) = \frac{A}{1 + Be^{-rt}} \quad (3)$$

其中常数 A 、 B 与 r 为待辨参数。

2.2 基于灰色系统理论的逻辑斯蒂(logisitic)生物种群模型

为了确定逻辑斯蒂(logisitic)生物种群模型(3)中的待辨参数 A 、 B 与 r ,本文利用灰色系统理论来解决该问题^[2]。为讨论问题的方便,将逻辑斯蒂(logisitic)生物种群模型(3)改写为

$$z(t) = \frac{1}{N(t)} = \frac{1}{A} + \frac{B}{A} e^{-rt} \quad (4)$$

对方程(4)求微分得

$$\frac{dz(t)}{dt} = -rz(t) + \frac{r}{A} \quad (5)$$

下面借用文献[3-4]中介绍的基于信息再利用的灰色系统 GM(1.1)模型建模方法来确定待辨参数 A 、 B 与 r 。

简述文献[3-4]中介绍的基于信息再利用的灰色系统 GM(1.1)模型建模方法的建模过程如下:

首先利用[1]中的方法确定(logisitic)生物种群模型(5)中的待辨参数 A 与 r ,然后将已辨参数 r 带入(logisitic)生物种群模型(4),可将模型(4)称为毛坯模型。

然后对毛坯模型(4)进行精加工,即将毛坯模型(4)改写为

$$z(t_k) = \alpha e^{-r(t_k - t_1)} + \beta \quad k=2,3,\dots,n \quad (6)$$

其中 $\alpha=B/A$ 与 $\beta=1/A$ 为新的待辨参数。

再次利用原始数据序列

$$N = \{ N(t_1), N(t_2), \dots, N(t_n) \}$$

以及原始数据序列对应的时间序列

$$t = \{ t_1, t_2, \dots, t_n \}。$$

将原始数据序列及其对应的时间序列

$$t = \{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$$

代入式(6),利用线性代数中的矩阵方程可确定待辨参数 α 与 β ^[3-4]:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

其中

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & e^{-r(t_2-t_1)} & \dots & e^{-r(t_n-t_1)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y = [N(t_1), N(t_2), \dots, N(t_n)]^T$$

利用上面求得的参数 α 与 β , 求出式(4)中的参数 A 、 B , 加上前面得到的参数 r , 最终可得到精度较高的逻辑斯蒂(logistic)生物种群模型

$$N(t) = \frac{A}{1 + Be^{-rt}}$$

3 基于灰色系统理论与逻辑斯蒂(logistic)生物种群模型的中国人口增长模型

基于灰色系统理论与逻辑斯蒂(logistic)生物种群模型的中国人口增长模型的分析方法是:

采用逻辑斯蒂(logistic)生物种群模型, 结合原始数据, 利用基于信息再利用的灰色系统 GM(1.1)模型建模方法来确定(logistic)生物种群模型中的待辨参数 A 、 B 与 r , 得到基于灰色系统与(logistic)生物种群模型的中国人口增长模型。

实证分析如下:

表1是我国1982年大陆29个省、市、自治区(不包括福建省的金门、马祖等岛屿)人口普查的统计数据、1990年大陆30个省、自治区、直辖市(不包括福建省的金门、马祖等岛屿)人口普查的统计数据和2000年大陆31个省、自治区、直辖市(不包括福建省的金门、马祖等岛屿)人口普查的统计数据^[1]。

Table 1. Original data
表 1. 原始数据

时间(年)	1982年	1990年	2000年
人口普查数 (单位:百万)	1031.88	1160.02	1295.33

首先求出原始统计数据序列的倒数序列, 然后利用文献[2-3]中介绍的基于信息再利用的灰色系统 GM(1.1)模型建模方法, 求出倒数序列的 GM(1.1)模型, 最终可得到精度较高的中国人口增长逻辑斯蒂(logistic)模型:

$$\frac{1}{N(t)} = 0.009229098 e^{-0.110216466 t} - 0.08259979$$

其中, $t=0$ 对应 1982 年、 $t=1$ 对应 1990 年、 $t=2$ 对应 2000 年, 依此类推。

Table 2. Original data, and simulated data and forecast data
表 2. 原始数据、模拟数据与预测数据

时间	原始数据	模拟数据	residual	预测数据
1982	1031.88	1031.88	0	
1990	1160.02	1160.08	0.0601	
2000	1295.33	1295.25	-0.0777	
2010				1446.17
2020				1614.68
2030				1802.82

比较表2原始数据、模拟数据与预测数据, 进行对比分析, 注意观测残差, 可以看出采用逻辑斯蒂(logistic)生物种群模型, 结合原始数据, 利用基于信息再利用的灰色系统 GM(1.1)模型建模方法来确定(logistic)生物种群模型中的待辨参数 A 、 B 与 r 后, 得到的基于灰色系统与逻辑斯蒂(logistic)生物种群模型的中国人口增长模型的模拟精度比较高。

实证分析表明, 尽管只有3个原始数据, 基于灰色系统理论与逻辑斯蒂(logistic)生物种群模型的中国人口增长模型依然较好地预测了我国的人口增长趋势。

4 讨论

2010年我国即将进行例行的十年一次的全国人口普查。根据中国最近进行的三次全国人口普查数据, 我们利用基于灰色系统与逻辑斯蒂(logistic)生物种群模型的中国人口增长模型预测了2010年我国人口总数将达到1446.17百万。另外, 我们还利用基于灰色系统理论与逻辑斯蒂(logistic)生物种群模型的中国人口增长模型预测了2020年和2030年我国人口总数将达到1614.68百万和1802.82百万。当然, 这是根据我国1982年、1990年和2000年全国人口普查的统计数据给出的估计, 一旦2010年的全国人口普查数据出来后, 应该加入该数据修正模型。

致 谢

This project was supported by Chongqing Medical University gran (NSFY200722).

References (参考文献)

- [1] <http://www.stats.gov.cn/tjgb/rkpcgb>
- [2] Deng Ju-long. Control Problems of Grey Systems[J]. Syst & Contr Lett, 1982, 1(5), P288-294.
- [3] Zhang Shiqiang, Discussion about Non-equal-space Sequence Modelling Process [J], *Mathematics in Practice and Theory*, 2007, 37(18), P50-56(Ch)
张世强, 关于非等距序列建模过程的讨论[J], 数学的实践与认识系统, 2007, 37(18), P50-56.
- [4] Zhang Shiqiang, Modeling Method of Grey System GM(1.1) Model Based Information Reused and It's Application [J], *Mathematics in Practice and Theory*, 2009, 39(13), P97-104 (Ch)
张世强, 基于信息再利用的灰色系统 GM(1,1) 模型建模方法及应用[J], 数学的实践与认识系统, 2009, 39(13), P97-104.
- [5] Zhang Shiqiang, Jiang Zheng, Modeling Method of Logistic Model Based Grey System[J], *Mathematics in Practice and Theory*, 2010, 40(9), P144-148 (Ch)
张世强, 蒋峥, 基于灰色系统的逻辑斯蒂模型的建模方法[J], 数学的实践与认识系统, 2010, 40(9), P144-148.