

Research of Lumped Parameter Model of Comb-driven Resonator

Yang Qing

Department of Electronical Engineering, National Institute of Hubei, Enshi, China, 445000

Abstract: Comb resonator, driven by static electricity, is a typical MEMS device, and with its good linear relationship of displacement and voltage, it is widely used in micro-sensors, MEMS filters and microdisplacement control, etc. Comb resonator modeling enables the designer to carry out device analysis and performance simulation for the MEMS and optimization for various parameters at the design stage, and it can also take the influence caused by variation of process to performance into account, and examine the efficiency of process and mask before manufacturing begins. In this thesis, the dynamical quality of resonance is calculated and imposed on the quality of oscillator under the lumped parametric method, then a macro-model described with ordinary differential equations and algebraic equations is established, which provides the foundation for the design and fulfillment of the comb resonator.

Keywords: comb resonator; lumped parameter; macro model; research

梳状谐振器的集总参数模型研究

杨庆

湖北民族学院电气工程系, 恩施, 中国, 445000

摘要: 静电驱动的梳状谐振器是典型的 MEMS 器件, 由于它的位移 - 电压的线性关系良好, 所以在微传感器、微机械滤波器以及微位移控制等方面得到广泛应用。梳状谐振器建模的目的是使得设计者在设计阶段就能进行整个微系统的器件分析和性能模拟, 对各种参数进行优化, 并且能够在制造前检验工艺及掩模的有效性, 考虑工艺的变化对性能的影响。论文利用集总参数方法, 把谐振子的动态质量折算到振子上, 建立了用常微分方程和代数方程描述的宏模型。为梳状谐振器的设计与实现打下了基础

关键词: 梳状谐振器; 集总参数; 宏模型; 研究

1 引言

梳状谐振器 (Electrostatic comb-driven resonator) 是一种典型的静电驱动 MEMS (Micro Electro Mechanical systems) 器件, 其体积微小、结构精细且工作环境恶劣, 同时由于采用半导体加工工艺, 它的设计加工与传统的设计加工不同。传统的设计加工思路是从零件到装配最后的系统。梳状谐振器是采用微电子和微机械加工技术将所有的零件、电路和系统在通盘考虑下几乎同时制造出来, 零件和系统是紧密结合在一起的, 必须保证一次生产成功, 无法采用传统的“样机—测试—重设计”设计思路和设计手段。因此, 要采用新观念、站在系统的高度来进行设计加工, 其中的器件的设计已不再是传统意义上的设计, 而是包含了新工作原理的研究和新器件结构的开发。基于半

导体工艺的梳状谐振器的样片测试只能用来证实设计, 而不是发现错误。梳状谐振器建模的目的是使得设计者在设计阶段就能进行整个微系统的器件分析和性能模拟, 对各种参数进行优化, 并且能够在制造前检验工艺及掩模的有效性, 考虑工艺的变化对性能的影响^[1]。

由于静电驱动的梳状谐振器在工艺上容易与 IC 集成, 它的位移—电压的线性关系良好, 因此在实际中有着广泛的应用, 由它组成的微传感器、微机械滤波器在航空、航天、汽车、生物医学、环境监控、军事及几乎人们所触及到的各个领域都具有十分广阔的应用前景。

2 梳状谐振器的工作原理

静电驱动梳状谐振器是典型的 MEMS 器件。图 1 所示为梳状谐振器的原理结构图, 对梳状结构而言,

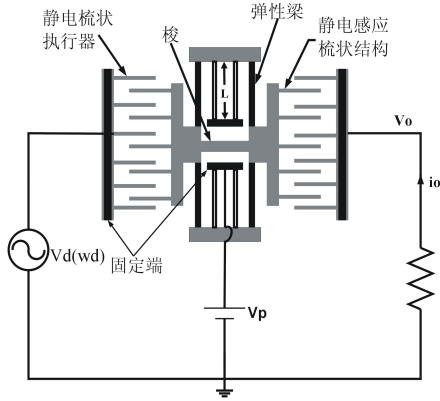


图 1. 梳状谐振器原理图

Figure 1. A schematic diagram of the comb resonator

梳齿部分直接构成平板电容器，采用静电驱动和电容检测的方式。比起其它静电执行器，它的位移—电压的线性关系更好，所以其在微传感器、微机械滤波器以及微位移控制等方面得到广泛应用^[3]。

该谐振器结构由上下两层组成，上层为梳状结构，下层为硅衬底。上层的左右两侧对称设计可活动的梳齿结构，平行地插入固定梳齿的齿间。这样，齿与齿之间就形成了平板电容器。整个活动梳在悬臂弹性梁支撑下悬空。内弹性梁一端与导向桁架相连，另一端连接在固定支座上；而外弹性梁一端也与导向桁架相连，另一端连接在谐振器的中心质量块上。一般情况下，内外弹性梁的长度不相等，但宽度和厚度取相同值。由于弹性梁设计的细而且长，所以该弹性支撑系统具有很大的韧性。可动的导向桁架，便于弹性梁内残余应变的释放^[4]。

从功能上可以分为三部分，固定叉指状电极，作为电信号的输入输出的能量转换接口部分；谐振器可以发生振动位移部分（“振子”），振子从结构上又分为结构主架部分和叉指换能部分，其中结构主架承载了振子大部分质量，并且连接了其它功能部件，振子上叉指换能部分与固定电极上的叉指交叠，形成电容，以感应电信号的输入和负责将处理后的机械运动转化为电信号输出；还有结构的支撑部分，也是弹性部分，包括挠曲弹性梁和桁架^[5]。

梳状执行器能在衬底面上产生相对较大的位移。梳状驱动结构使谐振器驱动力的施加和静电感应电流的产生都和振子的位移无关，保证了信号的线性传输，并且振子的折合支撑梁对称分布，其中应力对谐振器的影响可以减弱。

当谐振器的可动部分受到来自固定叉指的静电力时，就会在水平方向发生位移。其中静电力的频率等于固定电极端输入信号的频率。当信号频率等于谐振器的固有频率时，发生最大位移的振动。同时，此振

动导致输出端电容的变化，从而在输出端得到交变电流^[6]。

3 结构参数

梳状谐振器的版图如图 2 所示。

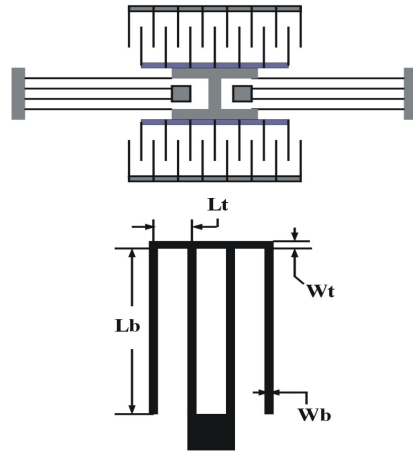


图 2. 梳状谐振器版图

Figure 2. A templet of the comb resonator

梳状谐振器的剖面图如图 3 所示。

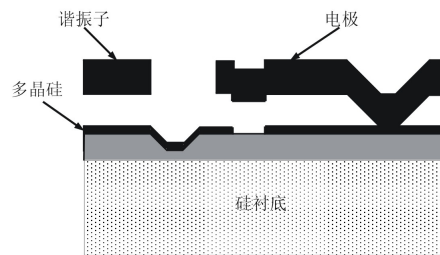


图 3. 梳状谐振器结构剖面图

Figure 3. A section plan of the comb resonator structure

表 1 列出了梳状谐振器的结构参数。

表 1. 梳状谐振器的结构参数

Table 1. Structural parameters of the comb resonator

| variable | description | value |
|----------|--------------------------|------------------------|
| Lb | Length of flexture beam | 200.0um |
| Wb | Width of flexture beam | 2.0um |
| Lt | Lenth of truss beam | 33.0um |
| Wt | Width of truss beam | 3.0um |
| Wf | Width of finger | 2.0um |
| g | Gap between comb fingers | 2.0um |
| h | Structure thickness | 2.0um |
| As | Shutter area | 1.54e4 μm^2 |
| d | Air film thickness | 2.0um |

3 集总参数模型

集总参数模型是建立在能量守恒基础上的。用能量守恒的方法将谐振器全部的质量转换到所关心的位

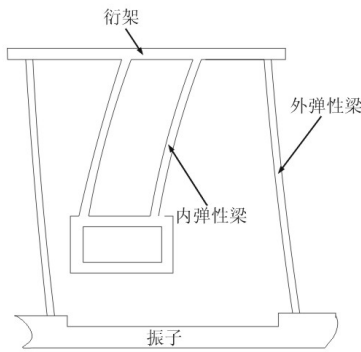


图 4. 折合梁变形示意图

Figure 4. A schematic diagram of the deformed folded beam

置上, 这样, 此位置的运动模式就代表了系统的运动。于是, 整个谐振系统可以转换成简单的质量-弹簧-阻尼振动系统, 即

$$F = m_x \ddot{x} + B_x \dot{x} + k_x x \quad (3.1)$$

式中, F 是两个梳状驱动产生的静电力的合力, m_x 是有效质量, B_x 为阻尼系数, k_x 是弹性系数^[7]。

3.1 有效质量和弹性系数

下面我们开始有效质量和弹性系数的推导过程。图 4 表现了折合梁部分在发生位移时的变形形状。

谐振器的最大动能可以表示为:

$$\begin{aligned} KE_{\max} &= KE_c + KE_t + KE_{bi} + KE_{bo} \\ &= \frac{1}{2} [v_c^2 m_c + v_t^2 m_t + \int v_{bi}^2 dm_{bi} \\ &\quad + \int v_{bo}^2 dm_{bi} + \int v_{bo}^2 dm_{bo}] \end{aligned} \quad (3.2)$$

式中下标表示谐振器的位置, s 表示振子, t 表示桁架, bi 表示支撑梁的内梁, bo 表示支撑梁的外梁, m 和 v 分别表示谐振器某个部分的质量和最大振动速率^[8]。

由于活动梳的线速度 $v_c = \omega_0 x_c$, 于是它的动能 KE_c 可表示为

$$KE_c = \frac{1}{2} (\omega_0 X_c)^2 m_c \quad (3.3)$$

对于一根挠性梁, 它的弹性系数是

$$k = Eh \left(\frac{W}{L}\right)^3 \quad (3.4)$$

E 是杨氏弹性模量, h 、 W 、 L 分别是梁的厚度、宽度和长度。

由材料力学可以知道, 若悬臂梁在距离固定点 L 长处受力 F , 发生 y 方向的挠曲变形, 则沿梁长 x 方

向任意坐标的挠度可以表示为^[9]

$$y(x) = \frac{F}{k} \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] = y_{\max} \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (3.5)$$

在微谐振器中, 当振子受到的驱动力是 F_d 后, 通过桁架和支座作用到内梁上的力也是 F_d , 同样振子和桁架的外梁所受到的力也是 F_d , 如果内外梁长度分别为 L_{bi} 和 L_{bo} , 就可以得到其弹性系数之比以及最大位移之比的关系式

$$\frac{k_{bi}}{k_{bo}} = \left(\frac{L_{bo}}{L_{bi}}\right)^3 \quad (3.6)$$

如果谐振器振子在驱动力作用下的最大位移是 y_s , 就可以得到振子位移和内外梁两端相对的位移关系^[10]

$$y_s = (y_{bi})_{\max} \cdot (1 + \phi^3) = (y_{bo})_{\max} \cdot \left(1 + \frac{1}{\phi^3}\right) \quad (3.7)$$

于是内梁沿 x 方向相对于支座的位移是

$$y_{bi}(x) = \frac{F_d}{k_{bi}} \left[3\left(\frac{x}{L_{bi}}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L_{bi}}\right)^3 \right] = \quad (3.8)$$

$$y_c \frac{1}{1 + \phi^3} \left[3\left(\frac{x}{L_{bi}}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L_{bi}}\right)^3 \right]$$

外梁上沿 x 方向相对于支座的位移是

$$y(x) = y_s \frac{F_d}{k_{bo}} \left[3\left(\frac{x}{L_{bo}}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L_{bo}}\right)^3 \right] = \quad (3.9)$$

$$y_s - y_s \frac{\phi^3}{1 + \phi^3} \left[3\left(\frac{x}{L_{bo}}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L_{bo}}\right)^3 \right]$$

通过这两个等式, 我们可以得到在发生谐振时, 谐振器支撑梁的内外梁的最大动能是

$$KE_{bi} = \frac{1}{2} \int_0^{L_{bi}} \omega_0^2 |y_{bi}(x)|_{\max}^2 \rho dx = \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{2} (\omega_0 y_s)^2 m_{bi} \cdot \frac{13}{35} \left(\frac{\phi^3}{1 + \phi^3}\right)^2$$

$$KE_{bo} = \frac{1}{2} \int_0^{L_{bo}} \omega_0^2 |y_{bo}(x)|_{\max}^2 \rho dx = \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{2} (\omega_0 y_s)^2 m_{bo} \cdot \left[\frac{1}{1 + \phi^3} + \frac{13}{35} \left(\frac{\phi^3}{1 + \phi^3}\right)^2 \right]$$

式中 m_{bi} 和 m_{bo} 分别是谐振器支撑梁内外梁的质量, 将它们代入式 (3.2), 得到系统最大动能表达式:

$$KE_{\max} = \frac{1}{2} (\omega_0 y_c)^2 \left\{ m_c + m_t \left(\frac{1}{1 + \phi^3}\right)^2 + \frac{13}{35} m_{bi} \left(\frac{1}{1 + \phi^3}\right)^2 \right. \quad (3.12)$$

$$\left. + \frac{13}{35} m_{bo} \left[\frac{1}{1 + \phi^3} + \frac{13}{35} \left(\frac{\phi^3}{1 + \phi^3}\right)^2 \right] \right\}$$

由此可知, 上式中中括号内的项数和为转化到振

子上的等效质量 m_{eq} ，即

$$m_{eq} = m_c + m_t \left(\frac{1}{1+\varphi^3} \right)^2 + \frac{13}{35} m_{bi} \left(\frac{1}{1+\varphi^3} \right)^2 + \frac{13}{35} m_{bo} \left[\frac{1}{1+\varphi^3} + \frac{13}{35} \left(\frac{\varphi^3}{1+\varphi^3} \right)^2 \right] \quad (3.13)$$

谐振频率是

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_r}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{4Eh_{th}}{m_{eq}(1+\varphi^3)} \left(\frac{W}{L_{bi}} \right)^3} \quad (3.14)$$

本例中，我们设定内外梁长度相等，即 $\varphi=1$ ，所以有效质量

$$m_{eq} = m_c + \frac{1}{4} m_t + \frac{12}{35} m_b \quad (3.15)$$

这里， m_c 是振子的质量， m_t 是桁架的质量， m_b 是梁的质量。

有效弹性系数为^[11]

$$k_x = \frac{2Et_w^3}{L_b^3} \frac{L_t^2 + 14aL_tL_b + 36a^2L_b^2}{4L_t^2 + 4aL_tL_b + 36a^2L_b^2} \quad (3.16)$$

式中， $a = (w_t / w_b)^3$

3.2 静电力

谐振器的运动是靠振子叉指与固定电极叉指之间形成的电容静电力，如图 5 所示。图中右端是信号的输入驱动端。

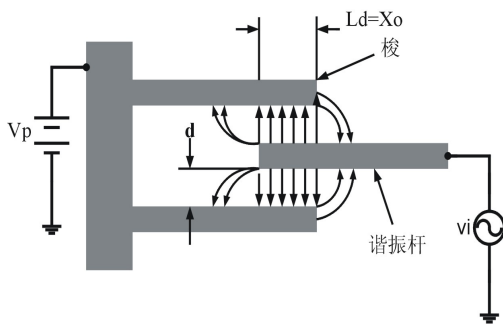


图 5. 梳状电容结构图

Figure 5. A Structural Diagram of Comb Capacitance

$$C_{total} = C_0 + C_{(x)} \quad (3.17)$$

在激励信号电压 v_i 的作用下，固定不动电极的叉指与振子叉指间形成交变静电力 F_d ，使振子在 y 方向发生移动。通过对电容能量进行微分，得到静电力的表达式：

$$F_d = \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{1}{2} (V_{pi}^2 - |v_i| \cos \omega t)^2 \frac{\partial C}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2} (V_{pi}^2 + 2V_{pi} |v_i| \cos \omega t + |v_i|^2 \cos^2 \omega t) \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{2} (V_{pi}^2 + \frac{|v_i|^2}{2} - 2V_{pi} |v_i| \cos \omega t + \frac{|v_i|^2}{2} \cos 2\omega t) \frac{\partial C}{\partial y} \quad (3.18)$$

式中 E 是电容的总储能， $V_{pi} = V_p - v_i, |v_i| \cos \omega t$ 是待处理的信号， C 是振子输入端叉指和固定电极叉指之间形成的电容。从上式中我们可以看到驱动力包括直流成分，频率为 ω 的交流成分以及频率为 2ω 的交流成分。当信号频率等于谐振频率时，静电产生的驱动力加载到振子上，使之能维持稳定的谐振状态。当信号频率等于振子固有频率 2 倍频时，驱动力的这一项也被增大了两倍，但是由于信号电压一般远远小于直流偏压 2~4 个数量级，而且因为谐振器二倍频振幅很小，所以这一项所造成的影响总是被忽略^[12]。

$$F_d = -V_{pi} V_i \frac{\partial C_i}{\partial Y} \quad (3.19)$$

负号表明信号电压和驱动力相位差达 180° ，这是由于电容的变化趋势是和位移相反的。从图 5 可见，理想情况下，驱动部分振子的叉指和固定电极

$$C'_i = \begin{cases} C'_{oi} = 2N \frac{\epsilon_r \epsilon_0 h_{th}}{d_{gap}} l_{overlap} \\ C'_{oi} + C'_{dyi}(t) = 2N \frac{\epsilon_r \epsilon_0 h_{th}}{d_{gap}} (l_{overlap} - y) \end{cases}$$

叉指形成的一个指隙电容可以由下式给出：

$$(\text{静态电容}) \quad (3.20)$$

$$(\text{动态电容})$$

式中， ϵ_r 是相对介电常数， ϵ_0 是真空的介电常数， h_{th} 是振子的厚度， d_{gap} 是叉指电容的间隙， $l_{overlap}$ 是静态时电容叉指的交叠长度。从上式可得出，电容比驱动力的相位滞后 90° ，也就是比信号的相位滞后 90° 。对于一端有 N 个叉指的振子而言，在发生振动时，驱动端电容与位移的微分关系可写成^[13]：

$$\frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial C_{dyi}(t)}{\partial y} = -2N \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h_{th}}{d_{gap}} \quad (3.21)$$

从上式中可以看到，电容对位移偏微分后是没有位移项的。将它代入驱动力的表达式，就可以发现驱动力和位移无关：

$$F_d = V_{pi} V_i \frac{2N \epsilon_0 \epsilon_r h_{th}}{d_{gap}} \quad (3.22)$$

本例中设定梳指宽度、间隙、多晶硅厚度以及牺牲层厚度相等，即 $(W_f = d_{gap} = h_{th} = d)$ ，每个梳状驱动产生的静电力与其两端的电压的平方成正比^[14]，即

$$F_d \approx 1.12 \varepsilon_0 N \frac{h_{th}}{d_{gap}} V^2 \quad (3.23)$$

根据叉指电容的模型,可以得到 C_{in} 和 C_{out} 的表达式

$$C_{in} = \frac{2N \varepsilon_0 h_{th} (x_{ov} + x)}{d_{gap}} \quad (3.24a)$$

$$C_{out} = \frac{2N \varepsilon_0 h_{th} (x_{ov} - x)}{d_{gap}} \quad (3.24b)$$

因为在大多数应用中,梳齿的厚度和间隙相当,所以边缘场效应很明显,再用平行板近似的方法就很不精确。这里,我们采用在对其进行有限元分析的基础上,提取电容的办法。叉指电容的表达式可修正为:

$$C = N \cdot \left(\frac{a \cdot \varepsilon \cdot h (x_{ov} + x)}{g^\beta} \right) \quad (3.25)$$

式中, ε_0 是空气的介电常数。其电行为由输入端的电容 C_{in} 和输出端的电容 C_{out} 组成:

$$i_{in} = \dot{q}_{in}(v_{in}, v_p, x) = \frac{d}{dt} [C_{in}(x)(v_p - v_{in})] \quad (3.26)$$

$$i_{out} = \dot{q}_{out}(v_{out}, v_p, x) = \frac{d}{dt} [C_{out}(x)(v_p - v_{out})] \quad (3.27)$$

$$i_p = -(i_{in} + i_{out}) = -\frac{d}{dt} [C_{in}(x)(v_p - v_{in}) + C_{out}(x)(v_p - v_{out})] \quad (3.28)$$

得到了用一组描述谐振器动态特性的常微分方程和代数方程。用硬件描述语言 VHDL-AMS 描述,可得到相应的集总参数宏模型。

References (参考文献)

- [1] Sergej Fatikow, Ulrich Rembold. Microsystem technology and microrobotics. Springer- verlag Berlin Heidelberg[M], 1997: 36~37.
- [2] 李德胜, 王东红等. MEMS 技术及其应用[M]. 黑龙江: 哈尔滨工业大学出版社, 2002: 6~7.
- [3] Li Desheng, Wang Donghong, etc. MEMS Technology and its Application [M]. Heilungkiang: Harbin Institute of Technology Press, 2002: 6~7.
- [4] Senturia S D. Microsystem design[D]. Kluwer Academic publishers, 2001: 25~30.
- [5] Romanowicz B F, Methodology for the modeling and simulation of microsystem[D]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998: 27~35.
- [6] [5] Tilmans H A C. Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: I. lumped-parameter systems. J[J]. Micromech, Microeng, 1996. 6(1): 157~176.
- [7] Gu Wuxian, Ma Zhengyang & Guang Zhenqun. A Method of Generating Automatic Quadrilateral Grid in any Area[J]. Journal of CAD and Graphics, 1998, 10(5): 75~86.
- 顾无亮, 马正阳, 关振群. 平面任意区域四边形网格自动生成的一种方法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1998, 10(5): 75~86.
- [8] Nathan A, Baltes H. Microtransducer CAD: physical and computational aspects[M]. Springer-Verlag, 1999: 256~274
- [9] Rudnyi E B., Korvink J G. Review: automatic model reduction for transient simulation of MEMS-based devices. Sensors Update[J], 2002, 11(1): 3~11.
- [10] Vandermeer J E. Nodal design of actuators and sensors[D]. Technicl Report, Carnegie Mellon University, 1998: 36~39.
- [11] Liu Yanzhu, Chen Wenliang & Chen Liqun. Mechanics of Vibration[M]. Beijing: Higher Education Press, 1998: 67~85.
- 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 67~85.
- [12] Rong Hua. Researches on Electromechanical Coupling of MEMS Device Equivalent Scheme Model and Correlation Theories[D]. Nanjing: Southeast China University, 2003: 34~40.
- 戎华. 机电耦合 MEMS 器件等效电路宏模型及其相关理论的研究[D]. 南京: 东南大学, 2003: 34~40.
- [13] Mehner J E, Gabbay L D, Senturia S D. Computer-aided generation of nonlinear reduced - order dynamic macromodels - II: stress-stiffened case[J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 2000. 9(2): 270~278.
- [14] Yin Baolin. CAD/CAE Technology of MEMS and its System Structure[J]. Journal of Instruments and meters, 1996, 17(1): 27~28.