

Study of Singular Integral Nature in BEM of 3-D Electromagnetic Fields

LI Yasha

China Three Gorges University, Yichang, China

Abstract: Accurate calculation of singular integral to improve the accuracy of the boundary element is of significance. In this paper, the first and second orders of singular integral formulae are derived by analytical methods in three-dimensional electromagnetic field linear interpolation boundary element. Making use of analytical formulae, the nature of the singular integrals is studied, and compared with numerical BEM. Educe that second singular integral is the main impact on the accuracy of numerical BEM. The results show that boundary accuracy improves greatly when singular integrals are calculated by analytic method.

Keywords: electromagnetic field calculation; boundary element method; singular integral; analytic method

三维静电场边界元法中奇异积分性质研究

李亚莎

三峡大学电气信息学院, 宜昌, 中国, 443002

摘要: 精确计算奇异积分对提高边界元的精度具有重要意义。本文用解析的方法导出了三维静电场线性插值边界元中的一阶和二阶奇异积分计算公式。利用解析公式研究了奇异积分的性质, 并和数值方法计算奇异积分的结果进行了比较, 得出二阶奇异积分是影响数值方法精度的主要因素。计算表明, 利用解析方法计算奇异积分时, 边界元精度有较大的提高。

关键词: 静电场计算; 边界元法; 奇异积分; 解析方法

1 引言

利用边界元方法计算三维静电场的场强分时, 影响计算精度的原因之一是对奇异积分计算是否达到足够的精度。处理三维静电场边界元中的奇异积分问题, 通常的数值方法是将单元细分^[1-7], 从而使场单元和源单元的高斯点避免重合。这样做虽然消除了积分的奇异性, 但在奇异积分比较突出的问题中, 比如薄板、狭缝表面的电场分布, 数值方法的计算结果并不理想。文献[8],[9]提出了 PART 数值方法计算奇异积分, 将边界积分单元用一切平面单元代替, 计算精度有了一定程度的提高。文献[10]在求解三维定常流 Stokse 问题时, 给出了常单元上的边界奇异积分解析公式。本文采用线性边界单元, 并将奇异积分中的线性形函数在直角坐标系中进一步展开, 分解为六个基本积分, 然后在局部极坐标系中用解析的方法导出这些积分计算公式。利用解析公式研究奇异积分的性质和数值方法计算奇异积分时计算结果的变化规律。

2 奇异积分的解析推导

三维静电场边界积分方程离散以后, 一阶和二阶

的奇异积分分别如下所示: $J_1 = \int_{\Gamma} \frac{N_i}{R} dS$, $J_2 =$

$\int_{\Gamma} \frac{N_i \cos \alpha}{R^2} dS$ 。这里 N_i 为形状函数, R 为源单元内一点到场点的距离, α 为源单元法向与 R 间的夹角。令 h 为场点到源单元平面的距离, 有 $\cos \alpha = h/R$ 。 Γ 为边界单元积分域。本文只讨论三角形平面单元上的线性插值。在直角坐标系中形状函数 $N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta$, ($i = 1, 2, 3$), 其中 a_i , b_i , c_i 是与节点坐标有关的常数^[11-12], Δ 为三角形单元的面积。下面讨论 J_1, J_2 在奇异情况下的解析计算方法。

2.1 一阶奇异积分 J_1

将形函数的直角坐标表示式代入 J_1 , 积分可进一步简化为三个基本积分 $\int_{\Gamma} \frac{x}{R} dS$, $\int_{\Gamma} \frac{y}{R} dS$, $\int_{\Gamma} \frac{1}{R} dS$ 。当场点在源单元上时, 三个积分变为奇异积分, 场点为奇点。图 1a 中, Δ_{ijk} 为边界源单元, o 为场点。连接 oi, oj, ok , 将单元上的积分转化为 Δ_{oij} , Δ_{ojk} , Δ_{oki} 上的积分。设被积函数为 f , 则

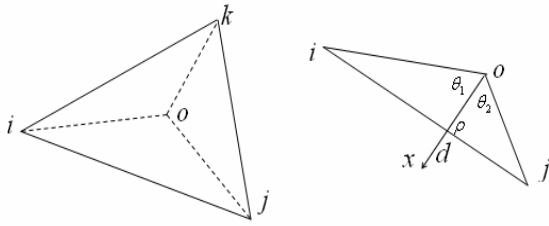


Figure 1. Domain of one order singular integral
(a) 积分区域分解 (b) 极坐标系
图 1. 一阶奇异积分的积分区域图

$$\int_{\Delta ijk} f dS = \int_{\Delta oij} f dS + \int_{\Delta ojk} f dS + \int_{\Delta oki} f dS \quad (1)$$

由于被分成的三个区域上的积分计算方法相同, 以 Δoij 上的积分为例推导三个积分的解析计算方法. 作 od 垂直 ij 于 d , 以 od 为极轴在单元平面上建立极坐标系, 令 $od = \rho$, od 与 oi, oj 的夹角分别为 θ_1, θ_2 (图 1b), $\theta_1, \theta_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ 。

在极坐标系中计算 Δoij 上的积分得

$$\int_{\Delta oij} \frac{x}{R} dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \int_0^{\rho/\cos \theta} \frac{r^2}{r} dr$$

$$= \frac{\rho^2}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (2)$$

$$\int_{\Delta oij} \frac{y}{R} dS = \frac{\rho^2}{2} \sec \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (3)$$

$$\int_{\Delta oij} \frac{1}{R} dS = \rho \ln |\sec \theta + \tan \theta| \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (4)$$

2.1 二阶奇异积分 J_2

将形函数和 $\cos \alpha = h/R$ 代入 J_2 中, 积分以可进一步简化为三个基本积分 $\int_{\Gamma} \frac{hx}{R^3} dS$, $\int_{\Gamma} \frac{hy}{R^3} dS$,

$\int_{\Gamma} \frac{h}{R^3} dS$ 。在图 2 中, 场点 p 在源单元的附近, 且在源单元上的投影为点 o , 则 $op = h$ 。则如图 2 所示:

在文献[13]中, 上面三个积分在非奇异情况下可表示为

$$\int_{\Delta oij} \frac{hx}{R^3} dS = hI_1 - \rho hI_2 \quad (5)$$

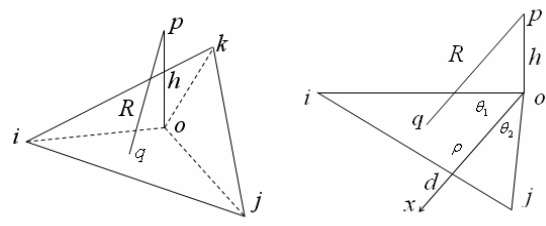


Figure 2. Domain of second order singular integral
(a) 积分区域分解 (b) 极坐标系
图 2. 二阶奇异积分的积分区域图

$$\int_{\Delta oij} \frac{hy}{R^3} dS = hI_3 - \rho hI_4 \quad (6)$$

$$\int_{\Delta oij} \frac{h}{R^3} dS = (\theta_2 - \theta_1) - hI_2 \quad (7)$$

其中

$$I_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta \ln \left| \frac{\sqrt{\rho^2 + h^2 \cos^2 \theta} + \rho}{h \cos \theta} \right| d\theta \quad (8)$$

$$I_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\rho^2 + h^2 \cos^2 \theta}} d\theta \quad (9)$$

$$I_3 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \ln \left| \frac{\sqrt{\rho^2 + h^2 \cos^2 \theta} + \rho}{h \cos \theta} \right| d\theta \quad (10)$$

$$I_4 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\rho^2 + h^2 \cos^2 \theta}} d\theta \quad (11)$$

由式(8), (10)的被积函数, 求下面式子的极限得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \ln \left| \frac{\sqrt{\rho^2 + h^2 \cos^2 \theta} + \rho}{h \cos \theta} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} h \ln \left| \frac{2\rho}{h \cos \theta} \right|$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -h \ln \left| \frac{h \cos \theta}{2\rho} \right| = 0 \quad (12)$$

由式(12)可知

$$\lim_{h \rightarrow 0} hI_2 = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} hI_4 = 0 \quad (13)$$

由式(9), (11)易知

$$\lim_{h \rightarrow 0} hI_3 = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} hI_6 = 0 \quad (14)$$

因此, 三个基本的二阶积分为

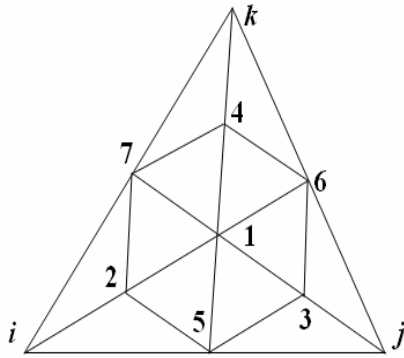


Figure 3. Subdivided element
图 3. 数值方法中的单元细分

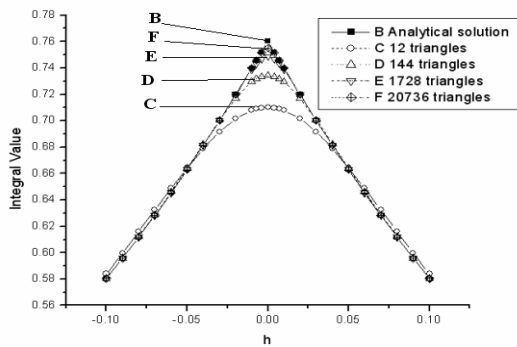


Figure 4. Relation of J_1 and h
图 4. 积分 J_1 与 h 的关系

$$\int_{\Delta_{oij}} \frac{hx}{R^3} dS = 0, \quad \int_{\Delta_{oij}} \frac{hy}{R^3} dS = 0 \quad (15)$$

$$\int_{\Delta_{oij}} \frac{h}{R^3} dS = \theta_2 - \theta_1 \quad (16)$$

由式(16), (1)得

$$\int_{\Gamma} \frac{h}{R^3} dS = 2\pi \quad (17)$$

3 奇异积分的性质

利用奇异积分的解析计算公式, 可以研究 J_1, J_2 的变化规律。并且以解析计算结果为标准, 可以进一步研究数值积分方法在计算奇异积分时引起的误差。取边长为 1 的正三角形作为源单元, 场点位于三角形中心(第一高斯点)的正上方(或下方), 用 4 点高斯积分计算 J_1, J_2 , 然后和解析方法的结果比较。首先以三角形顶点、中点和内部 4 个高斯点为顶点将三角形细分为 12 个小三角形, 如图 3 所示。

然后在每个小三角形上计算 4 点高斯积分。用同样的方法继续对每个小三角形细分, 可将单元分为 $12^2=144$, $12^3=1728$, $12^4=20736$ 个三角形。计算结果

见图 4、图 5。

由图 4、图 5 看出, 当单元被逐渐细分时, J_1, J_2 的数值积分结果逐渐接近解析积分结果。当场点由高斯点的一侧变到另一侧时, J_1 的数值和解析解都是连续的, 数值解的最大误差小于 7% (12 个小三角形情况)。 J_2 的解析结果在高斯点的两侧是不连续的, 而数值结果在高斯点的两侧则是连续的, 并且在高斯点处数值为 0。因此, 数值解在高斯点处的最大误差为 100%。所以在奇异积分比较突出的问题中, 比如计算薄的导

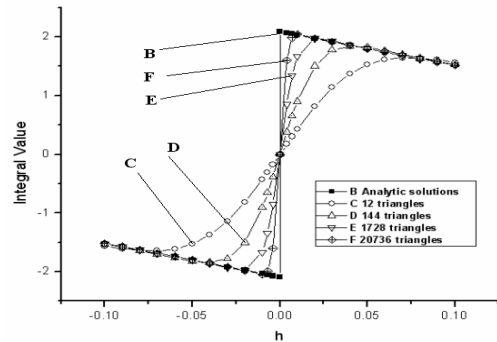
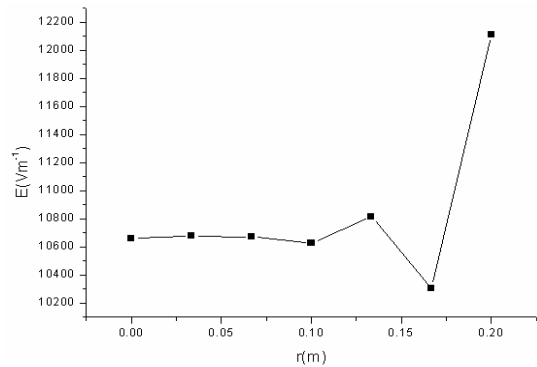
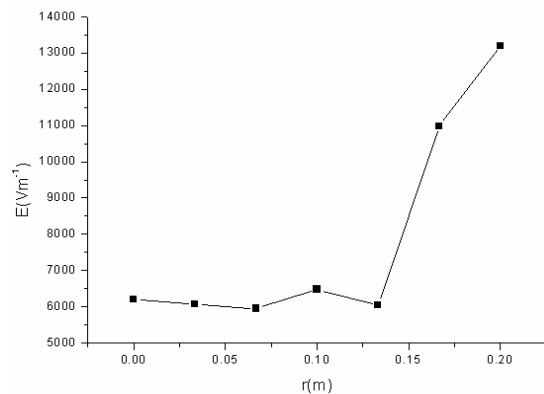


Figure 5. Relation of J_2 and h
图 5. 积分 J_2 与 h 的关系



(a) 奇异积分用解析公式的计算结果



(b) 奇异积分用数值公式的计算结果

Figure 6. Distribution of field intensities along radius
图 6. 电场强度的径向分布

体表面的电场分布, 细缝表面的电场分布时, 利用数值方法计算一阶和二阶奇异积分 J_1, J_2 , 二阶奇异积分 J_2 是引起误差的主要因素。

4 算例

计算圆盘形平板电容器电极表面的电场强度分布。假定电容器内部为空气, 极板直径 0.4m, 厚度 0.01m, 两极间气隙 0.01m。两极电位分别为 100V 和 0V。

按照理论计算, 电容器内部极板上的电场强度值应为 10000V/m。由于电容器两极板比较薄, 并且两极板间的距离非常近, 在计算极板上电场强度分布时, 奇异积分问题比较突出。如图 6(a)、(b)分别采用解析方法和数值方法计算奇异积分:

由图看出, 解析方法计算奇异积分时, 其结果比较接近理论值, 内部区域误差不到 7%; 而数值方法计算奇异积分时, 其计算误差比较大, 内部区域误差接近 40%。

5 结论

奇异积分计算误差的大小是影响边界元计算精度的重要因素。本文利用解析的方法导出了线性单元上一阶和二阶奇异积分的计算公式。利用解析结果研究了数值方法计算奇异积分时计算结果的变化规律, 得出二阶奇异积分是影响其边界元精度的主要因素。计算表面, 与数值方法相比, 解析方法计算奇异积分时, 边界元精度大大提高。

References (参考文献)

- [1] S.Kalaichelvan and J.D.Lavers, A Sub-triangulation method to improve the accuracy of singular integral evaluation in 3-D boundary element methods. IEEE Trans on Magnetics, 1988, 24(6): 2515-2517.
- [2] Mladen Trlep, Anton Hamler, Marko Jasenik, Bojan Štumberger. The FEM-BEM analysis of complex grounding systems[J]. IEEE Trans on magnetics, 2003, 39(3):1155-1158.
- [3] Stefan Kurz, Oliver Rain, Sergej Rjasanow. The adaptive-cross-approximation technique for the 3-D boundary element method[J]. IEEE Trans on magnetics, 2002, 38(2):421-424.
- [4] Liu Jiangling, Wang Zezhong. Integral Precision of the BEM of 3-D Electric Field[J]. High voltage engineering, 2005, 31(9):21-24.
刘姜玲, 王泽忠. 三维静电场边界元法的积分精度问题[J]. 高压技术, 2005, 31(9):21-24.
- [5] Wang Zezhong, Wang Bingge, Lu Binxian, Shao Hanguang. E-BE coupling method of 3-D open boundary eddy current fields in potential A-V[J]. Proceedings of the CSEE, 2000, 20(5): 1-4.
王泽忠, 王炳革, 卢斌先, 邵汉光. 三维开域涡流场A-V位有限元与边界元耦合分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2000, 20(5):1-4.
- [6] Ruan Jiangjun, Chen Xianzhen, Zhou Keding. Total H edge problems[J]. Transaction of China Electrotechnical society, 1997, 12(5): 45-48.
阮江军, 陈贤珍, 周克定. 三维瞬态涡流场的全H 棱边有限元边界元耦合算法研究[J]. 电工技术学报, 1997, 12(5):45-48.
- [7] Yao Degui, He Wei. Solutions of Forward Problem of ECG by Means of BEM in an Inhomogeneous Human Thoracic Model[J]. Transactions of china electrotechnical society, 2001, 16(3):71-74.
姚德贵, 何为. 边界元法在求解基于三维非均匀人体胸腔模型的心电图正问题中的应用[J]. 电工技术学报, 2001, 16(3):71-74.
- [8] K.Hayami and C.A.Brebbia, Quadrature methods for singular and nearly singular integrals in 3-D boundary element method. Boundary Elements X, Vol. 1, pp237-264, 1988.
- [9] Ken Hayami, High precision numerical integration methods for 3-D boundary element analysis. IEEE Trans on Magnetics, 1990, 26(2): 603-606.
- [10] Zhu Jialin. a boundary integral equation method for the stationary stokes problem in three dimensions[J]. Mathematica Numerica Sinica, 1985, 1:40-49.
祝家麟. 三维定常流Stokse问题的边界积分方程法[J]. 计算数学, 1985, 1:40-49.
- [11] Yang Dequan, Zhao Zhongsheng. Boundary theory and application[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2002.
杨德全, 赵忠生. 边界元理论及应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2002.
- [12] Jin Jianming. Electromagnetics fields finite element methods [M]. Xi'an: Xidian University Press, 2001.
金建铭. 电磁场有限元方法[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2001.
- [13] Li Yasha, Wang Zezhong, Lu Binxian. Analytical integrals in the linear interpolation BEM for 3-D electrostatic fields[J]. Chinese journal of computational physics, 2007,24(1):59-64.李亚莎, 王泽忠, 卢斌先. 三维静电场线性插值边界元中的解析积分方法[J]. 计算物理, 2007, 24(1):59-64.