

# Surface BEM and Its Application in Electric Field Computation of Insulator String

LI Yasha

China Three Gorges University, Yichang, China

**Abstract:** In order to improve the precision of boundary element method, aimed at spherical surface, cylindrical surface, cone surface and torus surface, on the condition of linearly meshing, based on coordinates transforms, the surface boundary element method is put forward. In this method the element integral is strictly carried through on the boundary surface, and the solved function is linearly interpolated on boundary surface element along the general coordinates, and directions of outward normal line to element and boundary surface are strictly unanimous. Making use of surface boundary element method, the insulator string electric fields are calculated, and the distributions of electric field intensity, voltage and volts per one insulator are gained.

**Keywords:** electrostatic field calculation; surface boundary element method; insulator; general coordinates

## 曲面边界元及其在绝缘子串电场计算中的应用

李亚莎

三峡大学电气信息学院, 宜昌, 中国, 443002

**摘要:** 为了提高边界元的精度, 针对球面、柱面、锥面和圆环面, 在线性边界元剖分情况下, 基于坐标变换, 提出了曲面边界元方法。该方法中积分的区域为边界曲面, 求解函数采用曲面上广义坐标线性插值, 单元的外法线方向取为严格的曲面法线方向。将曲面边界元方法应用于绝缘子串电场的计算, 得到绝缘子串上的电场强度和电位分布以及每片绝缘子上分担的电压。

**关键词:** 静电场计算; 曲面边界元; 绝缘子; 广义坐标

### 1 引言

在高压电力设备中经常会遇到各种形状的电极以及绝缘介质, 精确确定电极和介质表面的电场强度分布对电力设备的安全运行具有重要的意义。由于这类问题属于开域问题, 边界元方法是处理这类问题的理想方法。通常的做法是将求解区域的边界面剖分成三角形单元或四边形单元<sup>[1-11]</sup>。若采用线性单元, 则积分在剖分后的平面三角形单元或直边四边形单元上进行。网格剖分后的边界面比实际的边界面要小, 剖分越粗, 二者的差别越大。如果提高计算的精度, 必须增加单元和节点的数量, 但这会导致计算量的增加, 同时会增加计算机内存的使用量。提高计算精度的另一途径是采用二阶插值单元<sup>[11]</sup>, 由于二阶等参边界元也不能完全拟合实际曲面, 积分区域仍存在误差。提高计算精度最理想的方法就是直接在边界曲面上积分。工程计算中遇到的边界曲面绝大多数为球面、柱面、锥面和圆环面, 本文针对上述四种曲面, 提出曲面边界元方法。与线性插值边界元相比, 在不增加单元和节点数量的条件下, 单元积分在实际的边界曲面上进行, 因而具有较高的计算精度<sup>[12-14]</sup>。

### 2 曲边边界元基本原理

三维静电场光滑边界积分方程为

$$\frac{1}{2}\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}}{R^3} \phi(\mathbf{r}') \right] dS \quad (1)$$

式中  $\mathbf{r}$  为边界上的场点,  $\mathbf{r}'$  为边界上的源点;  $\phi(\mathbf{r})$  为场点电位,  $\phi(\mathbf{r}')$  为源点电位;  $R$  为源点到场点的距离,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ;  $\mathbf{n}$  为边界外法线方向,  $S$  为求解区域的边界。在实际的工程计算中, 边界  $S$  一般由球面、柱面、锥面和圆环面等曲面以及平面组成。对于普通的线性插值边界元, 线性单元为平面三角形或四边形, 能够精确表示平面边界, 但对于曲面边界, 用线性单元代替曲面则误差较大。减小剖分单元与实际边界的误差可以通过增加单元的数量来实现, 但这会增加计算时间和内存占用。减小误差的另一个途径就是直接在曲面上积分, 这一方法在不增加单元数量的情况下对实际的边界积分, 因此在提高计算精度的同时, 并没有增加内存的占用。

#### 2.1 球面边界元

对于球面, 式(1)中的积分可在球坐标系下计算。

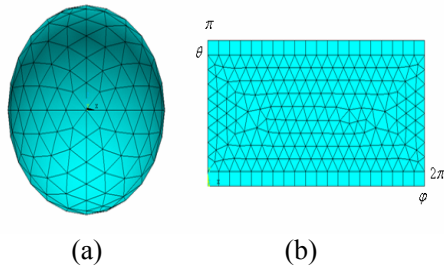


Figure 1. Relations between rectangle coordinates and spherical ones  
图 1. 直角坐标和球坐标的对应关系

由于球面半径  $r_0$  固定，球面积分转化为对两个角度球坐标的积分。

直角坐标与球坐标间的关系为

$$\begin{cases} x = r_0 \sin \theta \cos \varphi \\ y = r_0 \sin \theta \sin \varphi \\ z = r_0 \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

积分微元

$$dS = r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3)$$

球面外法线单位矢量  $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$

$$\begin{cases} n_x = \sin \theta \cos \varphi \\ n_y = \sin \theta \sin \varphi \\ n_z = \cos \theta \end{cases} \quad (4)$$

将球面进行单元剖分，则球面单元积分通过式(2)、(3)和(4)转化为平面单元上对球坐标  $(\varphi, \theta)$  的积分。

## 2.2 柱面边界元

柱面积分可以通过柱坐标变换转化为对柱坐标的积分。

如图 2 所示。

对于确定的圆柱面，半径  $r_0$  固定，直角坐标与柱坐标间的关系为

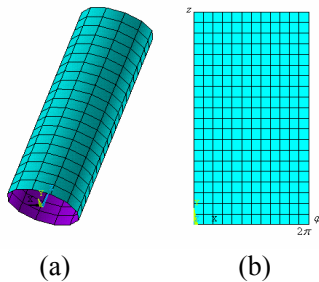


Figure 2. Relations between rectangle coordinates and cylinder ones  
图 2. 直角坐标和柱坐标的对应关系

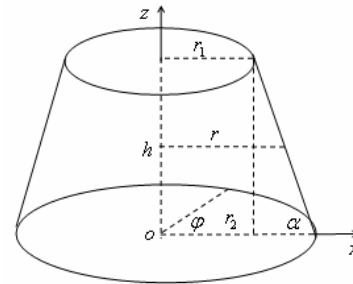


Figure 3. Cone surface  
图 3. 圆锥面

$$\begin{cases} x = r_0 \cos \varphi \\ y = r_0 \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (5)$$

积分微元

$$dS = r_0 d\varphi dz \quad (6)$$

柱面外法线单位矢量  $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$

$$\begin{cases} n_x = \cos \varphi \\ n_y = \sin \varphi \\ n_z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

将柱面进行单元剖分，则柱面单元积分通过式(5)、(6)和(7)转化为平面单元上对柱坐标  $(\varphi, z)$  的积分。

## 2.3 锥面边界元

圆锥面上任意一点  $(x, y, z)$  也可以用柱坐标  $(r, \varphi, z)$  表示，因而锥面积分也可以转化为对柱坐标  $(\varphi, z)$  的积分。

由图 3 可知，柱坐标  $r, z$  具有如下关系

$$r = r_2 - z \cdot \cot \alpha \quad (8)$$

因而，直角坐标与锥面上点的柱坐标间的关系为

$$\begin{cases} x = (r_2 - z \cdot \cot \alpha) \cos \varphi \\ y = (r_2 - z \cdot \cot \alpha) \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (9)$$

积分微元

$$dS = \frac{r_2 - z \cdot \cot \alpha}{\sin \alpha} d\varphi dz \quad (10)$$

锥面外法线单位矢量  $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$

$$\begin{cases} n_x = \sin \alpha \cos \varphi \\ n_y = \sin \alpha \sin \varphi \\ n_z = \cos \alpha \end{cases} \quad (11)$$

将锥面进行单元剖分，则锥面单元积分通过式(9)、(10)和(11)转化为平面单元上对柱坐标  $(\varphi, z)$  的积分。

### 2.4 圆环面边界元

对于一个确定的圆环面，圆环半径  $r_0$ ，圆环主体半径  $r_1$  固定。圆环面上任意一点可以由表示圆环截面位置的角度  $\varphi$  和表示截面上点的位置的角度  $\theta$  确定，如图 4 的圆环坐标系所示。圆环面上点的直角坐标  $(x, y, z)$  和圆环坐标  $(\varphi, \theta)$  存在一一对应的关系。因此对圆环面的积分可以转化为对圆环坐标  $(\varphi, \theta)$  的积分。

直角坐标与圆环坐标间的关系为

$$\begin{cases} x = (r_1 + r_0 \cos \theta) \cos \varphi \\ y = (r_1 + r_0 \cos \theta) \sin \varphi \\ z = r_0 \sin \theta \end{cases} \quad (12)$$

积分微元

$$dS = r_0 (r_1 + r_0 \cos \theta) d\varphi d\theta \quad (13)$$

圆环面外法线单位矢量  $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$

$$\begin{cases} n_x = \cos \theta \cos \varphi \\ n_y = \cos \theta \sin \varphi \\ n_z = \sin \theta \end{cases} \quad (14)$$

将圆环面进行单元剖分，则圆环面单元积分通过式(12)、(13)和(14)转化为平面单元上对圆环坐标  $(\varphi, \theta)$  的积分。

### 2.5 曲面边界元方程

对于上述几种曲面，将积分微元代入式(1)，并采用伽辽金加权余量方法，得边界元积分方程

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_e \iint_{S_e} N_i \sum_{j=1}^4 N_j \phi_j |J_e| d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_e \iint_{S_e} N_i \sum_{e'} \sum_{j=1}^4 \left( \iint_{S_{e'}} \frac{N_j}{R} |J_{e'}| d\varphi' d\theta' \right) \\ & \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j |J_e| d\varphi d\theta + \frac{1}{4\pi} \sum_e \iint_{S_e} N_i \sum_{e'} \sum_{j=1}^4 \left( \iint_{S_{e'}} \frac{N_j \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}}{R^3} \right) \end{aligned}$$

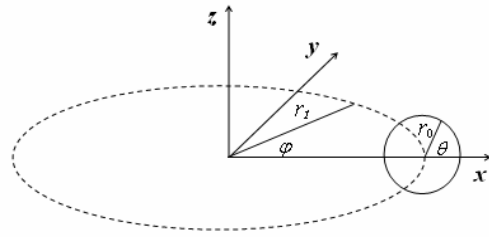


Figure 4. Ring coordinate system  
图 4. 圆环坐标系

$$|J_e| d\varphi' d\theta' \phi_j |J_e| d\varphi d\theta \quad (15)$$

式(15)中对广义坐标的积分，对于柱面和锥面只需将坐标  $\theta$  换成坐标  $z$  即可。式(15)中  $e'$  和  $e$  分别表示源单元和场单元；带撇表示源单元的量，无撇表示场单元的量。  $|J_e|$ ，  $|J_{e'}|$  为场单元和源单元上直角坐标向广义坐标变换的雅克比行列式。  $N_i$ ，  $N_j$  为单元的形函数。对广义坐标积分时，如图 1 (b)、2 (b) 所示，形函数取平面线性单元的形函数即可，而求解函数沿广义坐标线性插值。最后利用高斯积分法计算单元积分。

曲面边界元具有以下特点：

- 积分区域为边界曲面；
- 外法线方向为边界外法线方向；
- 求解函数在边界上沿广义坐标线性插值。

### 3 绝缘子串电场分析

以 220kV 电压等级绝缘子串为例利用曲面边界元分析其电场强度和电位分布。该电压等级相电压为 127kV，绝缘子数为 13 片，表面由平面，柱面和锥面组成，在拐角处可看成部分圆环面。将表面网格剖分，节点数 5152，单元数 5136。电场强度和电位分布云图如图 5、6 所示。

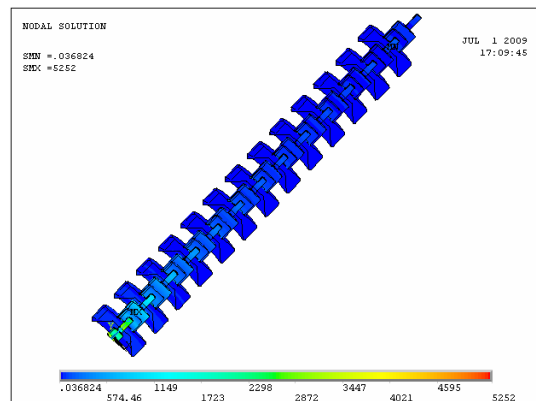


Figure 5. Contours of electric field intensity  
图 5. 电场强度分布云图

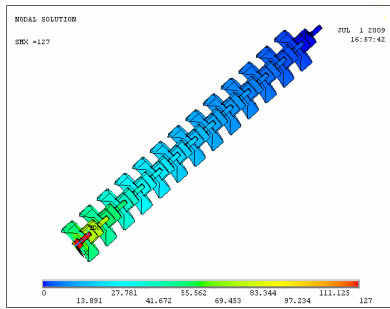


Figure 6. Contours of voltage  
图 6. 电位分布云图

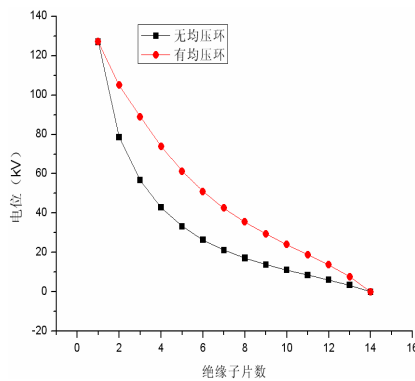


Figure 7. Comparison of voltage  
图 7. 电位分布比较

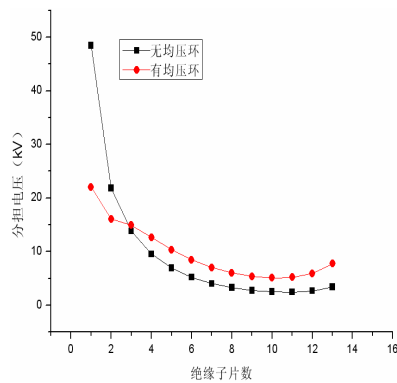


Figure 8. Comparison of voltage per one insulator  
图 8. 每片分担电压比较

由于图 5、6 没有加均压环，高压电极侧电场强度和单片绝缘子上分担电压较大。在高压侧加均压环，每片绝缘子上的电位分布和分担的电压如图 7、8 所示。为便于比较，同时将无均压环的情况画于图中。加均压环后，绝缘子串上的电位分布明显改善，每片绝缘子上最大分担电压由 48.5kV 降低到 22kV。

#### 4 结论

针对球面、柱面、锥面和圆环面，基于坐标变换，文章提出了曲面边界元方法。与线性单元边界元相比，

在相同的网格剖分情况下，曲面边界元积分计算是在实际边界上进行，因而具有较高的计算精度。将曲面边界元方法应用于绝缘子串电场的计算，得到绝缘子串上的电场强度和电位分布以及每片绝缘子上分担的电压。

#### References (参考文献)

- [1] Stefan Kurz, Oliver Rain, Sergej Rjasanow. The adaptive cross-approximation technique for the 3-D boundary element method[J]. IEEE Trans on magnetics, 2002, 38(2):421-424.
- [2] André Buchau, Wolfgang M. Rucker, Oliver Rain, Volker Rischmüller, Stefan Kurz, Sergej Rjasanow. Comparison between different approaches for fast and efficient 3-D BEM computations[J]. IEEE Trans on magnetics, 2003, 39(3): 1107 - 1110.
- [3] Yang Shi you, Ni Guang zheng. wavelet-galerkin method for the numerical calculation of electromagnetic fields[J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(1): 56-61. 杨仕友, 倪光正. 小波-伽辽金有限元法及其在电磁场数值计算中的应用[J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(1):56-61.
- [4] Liu Jiangling, Wang Zezhong. Integral Precision of the BEM of 3-D Electric Field[J]. High voltage engineering, 2005, 31(9):21-24. 刘姜玲, 王泽忠. 三维静电场边界元法的积分精度问题[J]. 高电压技术, 2005, 31(9):21-24.
- [5] Yuan Jian sheng, Zong Wei. Three-component boundary element method for 3-d eddy current calculation[J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(5): 27-29.
- [6] 袁建生, 宗伟. 计算三维涡流场的三分量边界元法[J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(5):27-29.
- [7] JIANG Bao-jun, SUN Li, LI Bo. Study of numerical computation of open boundary field in electromagnetic detection[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(8): 156-160.
- [8] 姜保军, 孙力, 李波. 电磁检测中的开域电磁场数值计算[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(8): 156-160
- [9] Wang Zezhong, Wang Bingge, Lu Binxian, Shao hanguang. FE-BE coupling method of 3-D open boundary eddy current fields in potential A-V[J]. Proceedings of the CSEE, 2000,20(5):1-4. 王泽忠, 王炳革, 卢斌先, 邵汉光. 三维开域涡流场 A-V 位有限元与边界元耦合分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2000, 20(5):1-4.
- [10] Ruan Jiangjun, Chen Xianzhen, Zhou Keding. Total H edge element hybrid FEM BEM method for 3D transient eddy current problems[J]. 阮江军, 陈贤珍, 周克定. 三维瞬态涡流场的全 H 棱边有限元边界元耦合算法研究[J]. 电工技术学报, 1997, 12(5):45-48.
- [11] Yao Degui, He Wei. Solutions of Forward Problem of ECG by Means of BEM in an Inhomogeneous Human Thoracic Model[J]. Transactions of china electrotechnical society, 2001, 16(3):71-74. 姚德贵, 何为. 边界元法在求解基于三维非均匀人体胸腔模型的心电图正问题中的应用[J]. 电工技术学报, 2001, 16(3):71-74.
- [12] Xu Jian yuan, Wang Feng, He Rong tao, Xiao Feng liang. the research on the electric field characteristics and the insulation breakdown property of the disconnector switchgear inside of three phase in one tank type 110 kV GIS[J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(9): 31-35. 徐建源, 汪枫, 何荣涛, 肖凤良. 110 kV 三相共箱式 GIS 内隔离开关部位电场及击穿特性的分析与研究[J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(9):31-35.
- [13] ZHAO Zhong-yuan, QIU Yu-chang, FANG Zhi, YU Yong-ming, WANG Jian-sheng. An improved surface charge simulation method and its application to computation of three-dimensional capacitance[J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(6): 67-70. 赵中原, 邱毓昌, 方志, 于永明, 王建生. 改进表面电荷法与三维空间电容的数值计算[J]. 中国电机工程学报, 2002,

- 22(6):67-70.
- [15] Li Yasha, Wang Zezhong. Curve element BEM in 3-D electrostatic fields based on ring coordinate systems[J]. Transaction of China Electrotechnical Society, 2006, 21 (9): 122-126.  
李亚莎, 王泽忠. 基于圆环坐标系的三维静电场曲边三角形边界元方法[J]. 电工技术学报, 2006, 21 (9): 122-126.
- [16] Li Yasha, Wang Zezhong. Curve Quadrangular BEMs in 3-D Electrostatic Fields Based on Cylinder Coordinate Transforms [J]. High voltage engineering, 2007, 33(1):132-135.  
李亚莎, 王泽忠. 基于柱坐标系的三维静电场曲边四边形边界元方法[J]. 高电压技术, 2007, 33(1):132-135
- [17] Wang Zezhong, Li Yasha. Curve Quadrangular BEM in 3-D Electrostatic Fields Based on Spherical Systems [J]. High voltage engineering, 2007, 22(4):32-36.  
王泽忠, 李亚莎. 基于球坐标系的三维静电场曲边四边形边界元方法[J]. 电工技术学报, 2007, 22(4):32-36.