

Research of The Estimated Mathematics Modeling Based on GRA-PDEA

LI Gang¹, SHI Bao-shan²

(1. Department of Mathematics and Information Science, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China,

2. College of Electr. Infor. Eng., Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou, 450002, China)

e-mail address: leagongpaper@yeah.net

Abstract: In order to solve the evaluation issue on the performance of multi-input and multi-output system, using the data envelopment analysis which has an advantage in the evaluation of relative efficiency of the system and the objective property of the weight of the index determined by the grey relation analysis, an evaluation model based on GRA-PDEA is built. The model fully reflects the makers' preferences for all criteria, and it has the advantage in studying the evaluation of the relative merits of a number of similar samples. At the same time, it can efficiently avoid the subjectivity caused by the makers. Finally, from the result of the simulation and analysis, the good virtues of our model are verified.

Keywords: systems engineering; mathematical model; data envelopment analysis; grey relation analysis; preferences; evaluation

基于 GRA-PDEA 方法的评价模型研究

李 刚¹, 师宝山²

1. 郑州轻工业学院数学与信息科学系, 郑州, 中国, 450002

2. 郑州轻工业学院电气信息工程学院, 郑州, 中国, 450002

e-mail address: leagongpaper@yeah.net

【摘要】为了解决多输入、多输出系统的效能评价问题,利用了数据包络分析在该系统相对效率评价的优势和灰色关联分析确定指标权重时的客观属性,构建了 GRA-PDEA 评价模型,该模型充分反映了决策者对各准则的偏好程度,具备研究多个同类样本的“相对优劣性”评价的优势,同时有效地避免了由于引入偏好带来的主观性。最后,通过仿真、分析,验证了提出的评价模型的优点。

【关键词】系统工程; 数学模型; 数据包络分析; 灰色关联分析; 偏好; 评价

1 引言

灰色系统理论(Grey System Theory)是针对系统模型的不明确性及信息不完整性,进行系统的关联分析与模型构建,并通过预测及决策等方式,来探讨及了解系统^[1]。在邓聚龙教授 1983 年提出灰色系统理论后,灰色系统理论得到了极大的发展。灰色关联分析(Grey Relation Analysis,简称 GRA)即通过一定的方法去量化描述系统中各元素之间的关系,1997 年田家华等人提出了灰色关联分析可以客观的确定权重的观点^[2],这为评价模型中指标权重的确定提供了一种客观可行的方法。

数据包络分析(Data Envelopment Analysis,简称

DEA)是由 Charnes 和 Cooper 等在 1978 年提出的一种“评价”方法^[3]。特别是在对研究多个同类样本的“相对优劣性”评价,由于不需要预先估计参数,在避免主观因素和简化运算、减少误差等方面有着不可低估的优越性,该方法近年来被引用到各个领域进行有效性分析。

然而,传统 DEA(C²R)方法在进行评价时,将各指标的重要程度等同看待,未能考虑到评价决策是对各指标的偏好程度^[4]。本文构建了面向输入/输出的偏好 DEA(Preferential DEA,简称 PDEA)模型,采用 GRA 方法确定指标的偏好权重,我们把该方法称为 GRA-PDEA 模型。然后以学生学习效果评价对该评价模型进行仿真、分析,并阐明该方法应用中的优越性。

基金项目: 河南省基础与前沿技术研究(072300410120); 河南省教育厅自然科学研究(2009A110021, 2008B630032, 2007120012); 河南省教育科学“十一五”规划(2007JKGHAG477)。

2 灰色关联分析方法

当人们对事物进行评价时需要知道一些基本信息，比如指标的基本信息，这时人们掌握的信息是不充分的。如果用主观评价法评价，还必须知道更多的信息，比如指标之间的关系，这时掌握的信息是充分的。但是由于系统因素的复杂，很多情况下人们并不清楚指标之间的关系，此时掌握的信息是不充分的，在这种情况下不能用主观评价法^[5]。灰色关联确定指标权重方法构建的理论依据是灰色系统理论的关联分析，它无需知道指标之间的关系，只要有指标的基本信息，即可根据其时间序列曲线的相似程度来判断其关联程度的大小，若两条曲线的形状相似，则关联度越大，权重也就越大；反之，关联度越小，权重也就越小。

定义 1 设 $X_0 = (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n))$ 为系统特征序列，且 $X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n))$ ， $(i = 1, 2, \dots, m)$ 为相关因素序列。给定实数 $\gamma(x_0(k), x_i(k))$ ，若实数

$$\gamma(X_0, X_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma(x_0(k), x_i(k)) \text{ 满足}$$

- (1)规范性：，且 $\gamma(X_0, X_i) = 1$ 当且仅当 $X_0 = X_i$ ；
- (2)整体性：对 $X_i, X_j \in \{X_s | s = 0, 1, 2, \dots, m; m \geq 2\}$ ，有 $\gamma(X_i, X_j) \neq \gamma(X_j, X_i), i \neq j$ ；
- (3)偶对称性：对于 $X_i, X_j \in X$ ，有 $\gamma(X_i, X_j) = \gamma(X_j, X_i)$ 当且仅当 $X = \{X_i, X_j\}$ ；
- (4)接近性： $|x_0(k) - x_i(k)|$ 越小， $\gamma(x_0(k), x_i(k))$ 越大。

则称 $\gamma(X_0, X_i)$ 为 X_i 与 X_0 的灰色关联度，简记 γ_{0i} ； $\gamma(x_0(k), x_i(k))$ 为 X_i 与 X_0 在 k 点的灰色关联系数，简记为 $\gamma_{0i}(k)$ ；并称条件(1)、(2)、(3)、(4)为灰色关联四公理。

定理 1 设系统行为序列

$$\begin{aligned} X_0 &= (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)) \\ X_1 &= (x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(n)) \\ X_m &= (x_m(1), x_m(2), \dots, x_m(n)) \end{aligned} \text{。对于 } \xi \in (0, 1) \text{，令}$$

$$\gamma_{0i}(k) = \frac{m + \xi M}{\Delta_i(k) + \xi M}, \quad \gamma_{0i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma_{0i}(k) \text{。}$$

则 γ_{0i} 满足灰色关联四公理。其中 $\Delta_i(k) = |x_0(k) - x_i(k)|$ ， $m = \min_i \min_k \Delta_i(k)$ ， $M = \max_i \max_k \Delta_i(k)$ ， ξ 为分辨系数。证明略^[6]。于是，指标权重确定的灰色关联分析方法可以按照下面的方法构建(mod1)。

Step1: 选取或构造参考因素序列

$X_0 = (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n))$ ，求参考因素序列和比较因素序列的初值像，即归一化

$$X'_i = (x'_i(j))_{j=1,2,\dots,n} = X_i / \sum_{k=1}^n x_i(k), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

Step2: 求差序列

$$\Delta'_i(k) = |x'_0(k) - x'_i(k)|$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$$

Step3 : 求两级最大差与最小差

$$M' = \max_i \max_k \Delta'_i(k),$$

$$m' = \min_i \min_k \Delta'_i(k), \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$$

Step4: 求关联系数，其中 $\xi \in [0, 1]$ 为分辨系数

$$\gamma'_{0i}(k) = (m' + \xi M') / (\Delta'_i(k) + \xi M'),$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n) \text{。}$$

Step5: 求关联度 $\gamma'_{0i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma'_{0i}(k)$ ， $(i = 1, 2, \dots, m)$

Step6: 计算第 i 个指标的权重系数

$$\omega_{0i} = \gamma'_{0i} / \sum_{i=1}^m \gamma'_{0i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

3 带偏好的 DEA 模型 (PDEA)

C^2WH 模型由 Charners、Cooper 和魏权龄等学者于 1986 年提出，该模型比起 C^2R 模型和 C^2GS^2 模型不但更具一般性，更为重要的是它可以体现决策者的偏好。

$$(\text{mod2}) \max \frac{u^T y_0}{v^T x_0}$$

$$\text{s.t. } v^T X - u^T Y \in K$$

$$v \in V \setminus \{0\}, u \in U \setminus \{0\}$$

其中， $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ ， $Y = (y_1, y_2, \dots, y_s)^T$ ， $V \subset E_+^m$ 、 $U \subset E_+^s$ 和 $K \subset E_+^n$ 是闭凸锥，分别称为输入锥、输出锥和决策锥，并且 $\text{Int}V \neq \emptyset$ 、 $\text{Int}U \neq \emptyset$ 。在应用 C^2WH 模型进行评价时，通过对输入锥 V 、输出锥 U 和决策锥 K 的选取，可以反映决策者对不同输入指标、输出指标和决策单元的偏好。模型中并没有给出如何选取约束锥的区间，在实际应用过程中，可以取为多面凸锥。

3.1 投影点

基于凸性、锥性、无效性和最小性的公理假设，有生产可能集： $T = \{(X, Y) | \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j \leq X, \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j \geq Y\}$ ，

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

原 DEA 模型(C^2R)可以表示为：

$$(\text{mod3}) \min[\theta - \varepsilon(\sum_{i=1}^m S_i^- + \sum_{r=1}^s S_r^+)]$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + S_i^- = \theta x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} \lambda_j - S_r^+ = y_{rj0} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0; \quad S_i^- \geq 0, S_r^+ \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

其中, n 表示 DMU 数量, m 、 s 分别表示输入和输出的个数, x_{ij0} 、 y_{ij0} 表示 DMU _{j_0} 第 i 项输入和第 r 项输出, S_r^+ 、 S_i^- 为松弛变量, ε 为非阿基米德无穷小量。

当最优解: $\theta^* = 1$, $S_i^{-*} = S_r^{+*} = 0$, 则 DMU _{j_0} 为 DEA 有效; 若 $\theta^* < 1$, 则 DMU _{j_0} 为 DEA 无效, 此时表明 DMU _{j_0} 的各项输入还可以再按同一比例 θ^* 减少; $S_i^{-*} \neq 0$ 或 $S_r^{+*} \neq 0$, 则表明某些输入量或输出量还可以再减少或增加。我们可以得到关于 DMU _{j_0} 的一个 DEA 有效前沿面的投影点 $(\hat{x}_{ij0}, \hat{y}_{ij0})$ [7]:

$$\hat{x}_{ij0} = \theta^* x_{ij0} - S_i^{-*} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad ;$$

$$\hat{y}_{ij0} = y_{ij0} + S_r^{+*} \quad (r = 1, 2, \dots, s)$$

容易看出模型(mod3)中一些变量的经济含义。 λ_j 使各个有效点连接起来, 形成有效前沿面。非零的 S_i^{-*} 、 S_r^{+*} 使有效前沿面可以沿水平和垂直方向延伸, 形成包络面。在实际运用中, 对非零松弛变量的研究是很有意义的, 因为它是一种“纯”的过剩量(S_i^{-*})或不足量(S_r^{+*})。 θ 则表示 DMU 离有效前沿面或包络面的一种径向优化量或“距离”。(mod3)是以各输入的同比例减少量(θ)的优化来实现评价的。事实上, 在某些问题的研究时, 其输入是没有办法再改动或者减少的。此时, 我们有必要建立面向输出的 DEA 模型, 以便研究在输入不可变动时, 通过增加产出来使决策单元有效。而在具体的评价决策过程中, 各输出的同比例增加也是不符合实践要求的。为此我们建立了带决策者偏好的输出 PDEA 模型。

3.2 含有输出偏好结构 DEA 模型

含有输出空间偏好结构 PDEA 模型:

$$(mod4) \max[(\sum_{r=1}^s u_r g_r) / (\sum_{r=1}^s u_r) - \varepsilon(\sum_{i=1}^m S_i^-)]$$

$$s.t. \quad g_r y_{rj0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \leq 0 \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + S_i^- = x_{ij0} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$g_r \geq 1; \quad \lambda_j \geq 0; \quad S_i^- \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

其中, g_r 表示各输出增加的比例, 为未知的优化量, 与之相对应 $u_r \geq 0$ 为决策者给出的权重系数。 u_r 的值越大, 表明相应的输出量越有优先权增加自身的数量。

显然, DMU _{j_0} 为 DEA 有效, 当且仅当 $g_r^* = 1$, 且 $S_i^{-*} = 0$; 否则称 DMU _{j_0} 为非有效。此时点 $(\hat{x}_{ij0}, \hat{y}_{ij0})$:

$\hat{x}_{ij0} = x_{ij0} - S_i^{-*} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ 、 $\hat{y}_{ij0} = g_r^* y_{ij0} \quad (r = 1, 2, \dots, s)$ 为 DEA 有效。

于是, 在利用数据包络分析方法进行相对有效性评价时, 采用上述模型就可以体现决策者或者决策单元的偏好, 从而避免传统 DEA 方法将决策单元的重要程度同等看待的不足。但是, 在目前模型的实际应用中大都采用征询专家意见的方法来确定权重, 这就可能导致主观性过强的问题, 这与 DEA 方法客观评价的初衷是相矛盾的[8]。为此, 本文提出利用 GRA 方法, 确定 PDEA 偏好, 根据历史数据和科学的方法得到相对客观的权重系数, 以保证 DEA 方法客观评价的本质。

4 GRA-PDEA 模型的构建

首先, 分析所研究问题的特征和实质, 确定能否采用建立的 GRA-PDEA 模型进行求解和分析。若上述模型能够满足研究问题的需要, 则采取适当的手段和方法确定评价的指标体系, 并据此收集和整理相应的数据。

其次, 运用灰色关联分析确定指标权重的方法求解权重向量。由于 PDEA 方法对数据分为输入指标和输出指标两类, 所以在求解权重时也要分为两类分别进行, 有时还需要根据问题的实际选择其中一类进行求解。在运用 GRA 方法求解权重之前, 需要根据研究的问题选取或者构造合适的参考因素序列。

最后, 将偏好程度应用于相应的偏好 DEA 模型, 并进行求解和分析。此时 PDEA 模型应该在灰色关联分析前就依据研究问题的特征和研究需要事先确定。

于是, 将 GRA 方法得到的指标权重作为 PDEA 模型中的权重, 既能体现决策单元的偏好程度, 又不失其相对客观性, 显然是一种较好的综合评价方法。

5 仿真与分析

本节以学生学习效果评价为实例, 对基于 GRA—PDEA 的评价模型进行仿真、分析和对比。

5.1 建立评价指标体系

在研究学生学习成绩评价的实践中, 限于篇幅, 本文就我校数学系某专业的 7 名学生作为样本, 研究第一学期学生的学习效果, 其中每位学生作为一个评价单元 DEU, 根据专业的特点和评价目的, 评价指标体系设置 3 项输入和 3 项输出指标, 各指标的含义如下:

- X_1 : 高考总成绩, 采用满分 750 分制;
- X_2 : 高考数学成绩, 采用满分 150 分制;
- X_3 : 高考理科综合成绩, 采用满分 300 分制;
- Y_1 : 期末数学分析成绩, 采用百分制;
- Y_2 : 期末高等代数成绩, 采用百分制;

Y_3 : 期末其他科目成绩, 采用难度系数加权百分制。选取的样本中 7 名学生的数据如表 1。

表 1 输入指标数据和输出指标数据

DMU	输入指标			输出指标		
	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
DMU ₁	553	110	184	88	95	87.9
DMU ₂	582	95	203	76	86	78.3
DMU ₃	564	84	228	92	98	91.6
DMU ₄	542	121	176	96	89	92.1
DMU ₅	628	76	253	64	87	69.5
DMU ₆	613	89	231	87	94	91.0
DMU ₇	640	123	208	94	79	88.4

5.2 面向输出的 GRA—PEDA 模型求解与分析

鉴于对学生学习效果评价实例的特点, 其输入指标无法改变, 我们采用面向输出的 GRA-PEDA 模型求解和分析, 考虑学生在今后学习过程中需要努力的方向。

5.2.1 运用 GRA 方法计算输出权重向量

在研究学生学习效果评价时, 我们的关注点主要在于考察学生学习的进步程度, 所以考虑将学生入学总成绩作为参考序列, 将第一学期各科考试成绩作为比较序列, 通过它们间的关联程度来说明该科成绩(指标)在评价学生进步性上的重要程度(权重)。

求出参考序列和比较序列的初值像, 可得差序列, 进而求出两级最大差 $M' = 0.045$, 最小差 $m' = 0.001$ 。

取分辨系数为在最小信息下的 $\xi = 0.5$, 由 GRA 方法求得关联系数如表 2 所示。

表 2 关联系数

γ'_{01}	0.662	0.644	0.595	0.448	0.348	0.922	0.959
γ'_{02}	0.595	0.887	0.566	0.701	0.662	1.000	0.456
γ'_{03}	0.662	0.723	0.610	0.516	0.402	0.922	0.797

所以可以得到各指标关联度为 $\gamma'_{01} = 0.654$, $\gamma'_{02} = 0.695$, $\gamma'_{03} = 0.662$ 。

于是, 指标权重为 $\omega = (0.3252, 0.3456, 0.3292)^T$ 。

5.2.2 面向输出的 PDEA 评价

将 GRA 方法得到的面向输出 PDEA 权重参数带入(mod4), 利用 Matlab 求解结果如表 3-4 所示。

表 3 mod4 仿真结果

DMU	λ^{*T}
DMU ₁	(1.0000,0.0000,0.0000,0.0000,0.0000,0.0000,0.0000)
DMU ₂	(0.6691,0.0000,0.0000,0.0000,0.0000,0.3459,0.0000)
DMU ₃	(0.0000,0.0000,1.0000,0.0000,0.0000,0.0000,0.0000)
DMU ₄	(0.0000,0.0000,0.0000,1.0000,0.0000,0.0000,0.0000)
DMU ₅	(0.0221,0.0000,1.0919,0.0000,0.0000,0.0000,0.0000)
DMU ₆	(0.0000,0.0000,0.0000,0.0000,0.0000,1.0000,0.0000)
DMU ₇	(1.1573,0.0000,0.0000,0.0000,0.0000,0.0000,0.0000)

表 4 mod4 仿真结果(续)

DMU	S_i^{-*T}	g_r^{*T}
DMU ₁	(0.0000,0.0000,0.0000)	(1.0000,1.0000,1.0000)
DMU ₂	(0.0000,9.3776,0.0000)	(1.1706,1.1171,1.1530)
DMU ₃	(0.0000,0.0000,0.0000)	(1.0000,1.0000,1.0001)
DMU ₄	(0.0000,0.0000,0.0000)	(1.0000,1.0000,1.0000)
DMU ₅	(0.0000,18.1415,0.0000)	(1.5999,1.2540,1.4669)
DMU ₆	(0.0000,0.0000,0.0000)	(1.0000,1.0000,1.0000)
DMU ₇	(0.0000,4.3056,4.9476)	(1.0835,1.3917,1.1508)

从而根据投影点的理论, 给出目标分数如表 5。

表 5 改进目标分数值

DMU	目标产出与差距					
	Y_1	差距	Y_2	差距	Y^3	差距
DMU ₁	88	0.00	95	0.00	87.9	0.000
DMU ₂	89	0.13	96	0.10	90.3	0.120
DMU ₃	92	0.00	98	0.00	91.6	0.000
DMU ₄	96	0.00	89	0.00	92.1	0.000
DMU ₅	102	0.38	109	0.22	101.9	0.324
DMU ₆	87	0.00	94	0.00	91.0	0.000
DMU ₇	101	0.07	110	0.31	101.7	0.133

5.2.3 结果分析

通过模型仿真结果进行分析, 本文提出基于 GRA—PDEA 评价模型较好的实现了多个同类样本的“相对优劣性”的评价优化。该方法考虑了学生的入学基础, 较之传统方法仅由最终成绩按总成绩排名更加客观、公正。考虑入学成绩已定, 通过带输出 PDEA 模型能够更明确指出学生在某方面的差距或不足所在, 从而较好地体现了学生在下一步学习中需要着力加强的方向, 这一点也比文献[8]中我们所采用的 C^2R 模型和 C^2GS^2 模型得到的结果更能体现评价的目的性。如采用 GRA—PDEA 模型的有效单元显然也是 C^2R 模型

和 C^2GS^2 模型的有效单元;无效单元均明确地给出了提升的方向,而且若将计算的精度更精细些,则会发现对有效单元也有进一步提升的空间,并可指明有效单元在各科欠缺的程度,如 $g_1^* = (1+3 \times 10^{-14}, 1+1 \times 10^{-14}, 1+2 \times 10^{-14})$ 、 $g_3^* = (1+2.647 \times 10^{-10}, 1+1.3996 \times 10^{-10}, 1+2.2383 \times 10^{-10})$,说明虽然 DMU_1 和 DMU_3 都有效,但 DMU_1 比 DMU_3 进步程度更大,各科欠缺的程度也不同。同时各指标的偏好程度由历史数据利用 GRA 方法得到,具有较大的客观性,有效地避免了在权重确定时人为的主观因素。

6 结语

本文从教育系统工程的实际问题出发,构建了基于 GRA—PDEA 的评价模型,将 GRA 模型的特点和 PDEA 模型的评价功能有效结合是该模型的创新点之一,充分利用了权重确定由历史数据运算的客观性和可行性。

根据学习效果评价特点,仿真分析表明,提出的基于 GRA—PDEA 评价模型较好的实现了多个同类样本的“相对优劣性”的评价优化,有效地避免了效能评价中的主观因素,体现了简化运算、减少误差等方面“有效性”评价的优点,及考虑“偏好”进行评价的优势。

References(参考文献)

- [1] DENG Julong. Grey Prediction and Gray Decision Making[M]. WuHan:Huazhong University of Science and Technology Press,2002.
邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社,2002.
- [2] TIAN Jiahua, LI Wanheng,ZHU Ming. The New Method of Weight Making in the Regional Mioeral Resources Synthetical Economic Evaluation[J]. Journal of China University of Geosciences,1997,22(6):557-558.
田家华,李万亨,朱明.区域矿产资源综合评价指标权重确定的几种新方法[J].中国地质大学学报.1997,22(6):557-558.
- [3] WEI Quanling. Data Envelopment Analysis[M]. BeiJing:Science Press,2004
魏权龄.数据包络分析[M]. 北京:科学出版社, 2004.
- [4] FANG Lei. Research on Location Model of Emergency System Based on DEA with Preference Information[J]. Systems Engineering-theory & Practice,2006,8:52-55.
方磊. 基于偏好 DEA 的应急系统选址模型研究[J]. 系统工程理论与实践, 2006,8:52~55.
- [5] LUO Dang, LIU Sifeng. Grey Incidence Decision-Making with Incomplete Information[J]. Journal of Applied Sciences,2005,23(4):83-87.
罗党, 刘思峰. 不完备信息系统的灰色关联决策方法[J]. 应用科学学报,2005,23(4): 83~87.
- [6] LUO Dang. Gray Systems Analysis Method[M]. ZhengZhou: Yellow River Conservancy Press,2005
罗党. 灰色决策问题分析方法. 郑州: 黄河水利出版社, 2005.
- [7] Chanesa,Cooperwwl,etal.Codataenvelopmentanalysisandmulti-objectiveprming,Int.J.SystemsSci.1989,20(7):1099-111
- [8] LI Gang, LI Wei. Learning Effect Evaluation Model based on Modified DEA[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2008,38(18): 59~64..
李刚,李蔚. 基于 C^2GS^2 的学生学习效果评价模型研究[J]. 数学的时间与认识, 2008,38(18): 59~64.