The Definition of Simple Stochastic Service System's Entropy

ZHANG Baolei
Department of Information and Computing Science, Langfang Teachers College, Langfang, China
e-mail: *Zhangbaolei1973@yahoo.com.cn*

Abstract: In the paper an approximate formula for calculating the entropy of the Poisson distribution is offered and its error is analyzed. The formula of queue's entropy, customer input's entropy and simple stochastic service system's entropy are computed on the distribution of the number of customers within the queue, service system and service factor. The law of entropy is researched and applied in the one-way bus system.

Keywords: entropy; service factor; a one-way bus system

简单随机服务系统中熵的推导

张宝雷
廊坊师范学院，廊坊，中国，065000
e-mail: Zhangbaolei1973@yahoo.com.cn

【摘　要】本文分析了泊松分布熵的近似计算公式并给出了误差分析,依据简单随机服务系统中顾客到达和系统内顾客数、队列内顾客数的分布，推导顾客输入、服务系统、队列熵的计算公式，分析了熵的规律，在单向公交系统中进行了应用。

【关键词】熵；服务因子；单向公交系统

1 引言

熵是系统不稳定程度的度量，在各个领域均有重要作用。如何应用熵描述简单随机服务系统的相关性质，熵的定义与计算公式研究还很少，本文推导出熵的简化计算公式，为相关研究提供帮助。

2 “M/M/1”服务系统模型简介

一个服务系统由顾客输入、排队、服务机构三个过程构成。“M/M/1”服务系统实际上是单线等候系统，仅有一个服务设施，顾客输入服从泊松分布，服务时间服从指数分布。一般描述为：t 时间内到达 r 个顾客的概率

$$P(t)=\frac{(\lambda t)^r}{r!}e^{-\lambda t};$$

顾客相继到达的时间间隔 T 分布函数为：$y=\lambda e^{-\lambda t}$；服务时间 S 的分布函数为：$y=\mu e^{-\mu t}$；单位时间到达顾客数的均值 λ，单位时间内服务顾客数均值 μ，服务因子：

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu};$$

系统闲置概率$1-\rho$；系统内有 n 个顾客的概率

$$P_n(t)=\frac{1}{n!}\left[(\lambda t)^n e^{-\lambda t}\right],$$

当$t\to\infty$时，$P_n(t)$无限接近$P_n=\rho^n(1-\rho)$ [1]。

3 随机服务系统中熵

3.1 单位时间到达顾客数的熵

随机变量 X 表示单位时间到达顾客数，则 $X\sim P(\lambda)$ 则其熵[2]为：

$$H(X)=\lambda\log\frac{e}{\lambda}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\log(n!)}{n!}$$

当 λ 较大时，近似认为 $X\sim N(\lambda,\lambda)$，由正态分布的熵知：

$$H(X)\approx\log(\sqrt{2\pi e\lambda}) \qquad (1)$$

通过 MATLAB7.0 对 0<λ<30000 计算得到下图：

资助信息：河北省科技发展计划项目（05213579）

经过回归分析得：$H(X)=1.4174+0.5\log\lambda$，而 $\log\sqrt{2\pi e}\approx 1.4189$ 与结果一致。

当 λ 较小时，（1）式的误差如下图所示：

随着 λ 增加，误差越来越小，说明公式（1）的有效性。

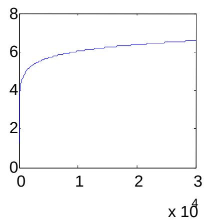

Figure 1. Entropy of 0<λ<30000
图 1. 0<λ<30000 的熵

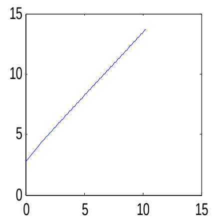

Figure 2. Entropy of logλ
图 2. 参数 λ 取对数后的熵

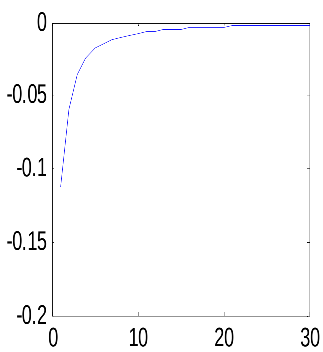

Figure 3. The entropy's error of 0<λ<30
图 3. 0<ρ<1 的熵误差

3.2 服务系统熵

稳定服务系统的熵以时间 $t\to\infty$ 时系统内顾客数 Y 的熵为定义，当 $t\to\infty$ 时系统熵：

$$H(Y)=\frac{\rho^2\log\frac{1}{\rho}}{1-\rho}+\log\frac{1}{1-\rho}\quad(\rho<1)$$

推导如下：

$$H(Y)=-\sum_{n=0}^{\infty}P_n\log P_n=-\sum_{n=0}^{\infty}P_n\log P_n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(1-\rho)\log(\rho^n(1-\rho))$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}n\rho^n(1-\rho)\log\rho-\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(1-\rho)\log(1-\rho)$$

$$=-\log\rho\sum_{n=0}^{\infty}n\rho^n(1-\rho)-\log(1-\rho)$$

$$=-\rho(1-\rho)\log\rho\sum_{n=0}^{\infty}n\rho^{n-1}-\log(1-\rho)$$

$$=-\rho(1-\rho)\log\rho\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)^2}-\log(1-\rho)$$

$$=-\frac{\rho^2\log\rho}{1-\rho}-\log(1-\rho)$$

其熵的图形：

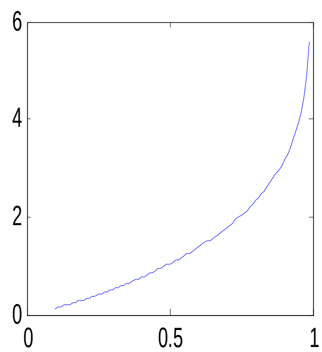

Figure 4. Entropy of 0<ρ<1
图 4. 0<ρ<1 的熵分布图

显然，随着服务因子 ρ 的增加，熵越来越大；当 $\rho\to 1$，$H(Y)\to\infty$，系统越不稳定。

3.3 服务系统队列熵的定义

队列为空的概率：$Q_0=P_0+P_1=1-\rho^2$

队列中有 n 个顾客的概率：$Q_n=P_{n+1}=\rho^{n+1}(1-\rho)$（$n\neq 0$）

队列中顾客数 Z 的熵为：

$$H(z)=-\log(1-\rho^2)+\rho^2\log(1+\rho)+\rho\log\rho-\frac{\rho^2\log\rho}{(1-\rho)^2}$$

推导如下：

$$H(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}Q_n\log Q_n=-(1-\rho^2)\log(1-\rho^2)-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n+1}\log P_{n+1}$$

$$=-(1-\rho^2)\log(1-\rho^2)-\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n+1}(1-\rho)\log(1-\rho)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\rho^{n+1}(1-\rho)\log\rho$$

978-1-935068-06-8 © 2009 SciRes.

$$=-(1-\rho^2)\log(1-\rho^2)-(1-\rho)\log(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n+1}$$

$$=-(1-\rho^2)\log(1-\rho^2)-\rho^2\log(1-\rho)-\frac{\rho^2\log\rho}{(1-\rho)^2}+\rho\log\rho$$

$$-\log\rho\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\rho^{n+1}$$

$$=-\log(1-\rho^2)+\rho^2\log(1+\rho)+\rho\log\rho-\frac{\rho^2\log\rho}{(1-\rho)^2}$$

4 单向公交系统熵的分析

4.1 模型假定

一定时间内公交线路上共有 s 个站点，平均出行的总人数为 n. 在上车人数分布中我们只取前 s-1 个站点，下车人数分布中，我们取后 s-1 个站点。设从第 i 个站点出行的平均人数为 λ_i，到达第 j 个站点的平均人数为 μ_j，满足 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=\sum_{j=1}^{s}\mu_j=n$ [3][4][5]，假设我们所问题不包含这样的情况：即到该线路的某一站，所有乘客均下车，在大量统计数据的情况下，该情况出现的可能性非常小(即 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i>\sum_{j=1}^{k}\mu_j$ $(k=1,2,\cdots,s-1)$。

4.2 定义

通常假定不同站点上下车人数相互独立，则到达第 k 个站点上车人数服从 $P(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i)$，下车人数服从 $P(\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i)$，其熵定义为：$H(Y)=\frac{1}{2}(\log\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i-\log\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i)$。

比较而言，此定义比利用 OD 矩阵定义的熵形式简单，还能反映不同站点的区别。

4.3 应用

经过对廊坊市一路公交车上下人数数据分析，计算出 18 个站点处的熵值（总共 21 个站点中除去开始 3 个下车人数为 0），熵值极值点在第六站点（即明珠商厦）处和第八站点（即火车站）处，与实际情况相符。

5 小结

本文只针简单随机服务系统的熵进行了定义,在一定程度上描述随机服务系统的性能，与具体实际相一致。相关定义还可以推广至复杂类型的随机服务系统中去。

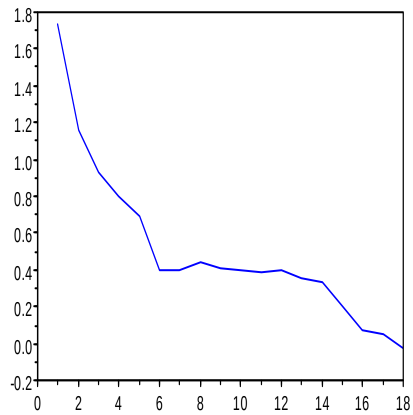

Figure 5. Entropy of spot No 1~18

图 5. 各站点的熵

致谢

本文中的公交数据由廊坊师范学院 03 级信息与计算科学专业、02 数本和 04 数接本的同学负责调查、整理，对于他们的工作，特此表示感谢。本文还受到李同胜教授的认真指导，特此感谢。

References (参考文献)

[1] Shen You Zhuao.Queuing theory and its applications in modern communication[M].Beijing: Post &Telecommunication Press. 2007,51-79(Ch).
盛友招.排队论及其在现代通信中的应用[M].北京：人民邮电出版社.2007,51-79.

[2] Shi Fen,Me Zhong Xi.Elements of Information Theory[M]. Wuhan:Wuhan University Press.2007,16-41(Ch).
石峰，莫忠息.信息论基础[M].武汉：武汉大学出版社.2007.16-41.

[3] Wang Wei,Yang Xin Miao,ChenXueWu.Planning and Management of Urban Transportation System[M].Beijing: Science Press2002,1-200(Ch).
王炜,杨新苗,陈学武．城市公共交通系统规划方法与管理技术[M]．北京：科学出版，2002．1-200

[4] Data collection at Intersection (in Thai)．Bangkok Metropolitan Administration.Thailand,2000,1-10.

[5] Lei Gong Yan. The introduction to mathematics model [M].Beijing: Beijing University Press.2000,161-171(Ch).
雷功炎．数学模型讲义[M]．北京：北京大学出版社，2000,161-171.