

The Application of Modified LMS Algorithm to Digital Screening

ZHAO Lianqing, SU Chang

School of Electric and Electronic engineering, North China Electric Power University, Beijing, China
e-mail: zhaolianqing@163.com, suchang_sc@163.com

Abstract: In order to optimize the traditional dithering screening algorithm of error diffusion, the basic principle of the least mean squared (LMS) adaptive algorithm is introduced, and the modified variable step LMS algorithm based on sampling function is analyzed. This algorithm is also used in the experiments of dynamic error diffusion screening of gray image. The results show that the variable step LMS algorithm based on sampling function can effectively improve the screening quality of the image and reproduce the tone more realistically.

Keywords: error diffusion; LMS; adaptive algorithm; variable step; sampling function

改进型最小均方算法在数字加网中的应用

赵莲清, 苏畅

华北电力大学电气与电子工程学院, 北京, 中国, 102206
e-mail: zhaolianqing@163.com, suchang_sc@163.com

【摘要】为优化传统的误差扩散抖动加网算法, 本文引入了最小均方(LMS)自适应算法的基本原理, 对基于抽样函数的变步长LMS算法进行了分析和研究, 并将这种算法用于灰度图像的动态误差扩散加网实验中。实验结果表明, 基于抽样函数的变步长LMS算法能有效提高图像的加网质量, 能更真实地再现图像的阶调层次。

【关键词】误差扩散; LMS; 自适应算法; 变步长; 抽样函数

1 引言

传统的误差扩散^[1]数字加网技术按照固定的比例和特定的方向配误差, 无论图像的层次变化情况如何, 误差的分配方式始终保持不变。这是传统误差扩散法的固有缺陷, 它必然导致图像畸变、细节损失等现象的出现。为避免这类问题的产生, 应当引入动态分配误差的思想来改进算法。

自适应算法根据图像的特征对其进行处理, 具有原理简单、易于实现等优点, 被广泛应用于噪声消除、印刷出版等领域。对自适应算法的研究始于上世纪中期, Widrow 于 90 年代提出了最小均方^[2] (Least Mean Squared, LMS) 误差自适应算法, 它根据局部区域多个像素的灰度特征动态地调整误差滤波器的分配系数, 使二值图像与原始图像在人眼视觉系统中的均方

误差最小, 从而保证最佳的加网效果。

传统固定步长 LMS 算法无法解决收敛速度和稳态误差之间的矛盾, 仍然有改进的必要, 变步长 LMS 算法应运而生。本文将基于抽样函数的变步长 LMS 算法^[3]应用于 FS 误差扩散法中, 改善了算法的性能, 并将改进后的误差扩散法用 Matlab 软件加以实现, 提高了图像加网的质量。

2 固定步长 LMS 算法

LMS 算法基于最陡下降法^[2]原理, 它的基本思路是: 根据处理单元所要求的理想输出与当前实际输出间的差值, 连续调整并优化系统的各连接权值, 使均方误差减到最小。

为了简化计算, 满足实时应用的要求, 通常取单个误差样本的平方误差代替均方误差, 用误差对权值的梯度的估计值代替其精确值, 沿着负方向即误差变小的方向迭代修正权值。尽管算法使用的误差并非准

项目基金: 国际科技合作计划项目资助课题(批准号 2007DFA71250)

确值，但得出的结果与准确值的偏差很小，对算法的总体效果几乎没有影响，满足工程上的要求；同时还避免了计算信号相关系数和相关矩阵，降低了算法的复杂程度和计算量，更易于实现。

LMS 算法的递推公式^[2]如式(1)所示：

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - X^T(n)w(n) \\ w(n+1) &= w(n) + 2\mu e(n)X(n) \end{aligned} \quad (1)$$

其中， $w(n)$ 表示 n 时刻自适应滤波器的权值矢量， $X(n)$ 表示 n 时刻的输入信号矢量， $d(n)$ 表示当前处理单元的理想输出值， $y(n)$ 则是实际的输出信号， $e(n)$ 为误差信号， μ 是控制算法收敛速度的常数，称为步长因子。

为保证固定步长 LMS 算法收敛^[2]，应当使 μ 的取值位于 $(0, 1/\lambda_{\max})$ 之间，其中 λ_{\max} 是输入信号自相关矩阵的最大特征值，通常 μ 的取值范围不超过 $(0, 2)$ 。当 μ 值较小的时候，它对滤波器的影响也比较小；当 μ 值较大时，它对滤波器的影响将变大。

最小均方自适应过程的实质就是通过迭代寻求最优的权值 $w(n)$ ，使得式(2)取得最小值的过程。

$$E = \sum_i |d(i) - y(i)|^2 = \sum_i |d(i) - X^T(i)w(i)|^2 \quad (2)$$

从理论上讲，最小均方误差法尽力减小了图像的整体误差，其处理效果应该是最优的。然而，由于权值调整的依据是局部误差，迭代法不可能使误差收敛于最小值而仅仅只能收敛于局部的极值，这必然影响实际的处理效果。此外，LMS 算法虽然简单易行，但当输入为相关信号的时候，其收敛速度明显下降，尤其当输入信号自相关矩阵的特征值与步长因子 μ 不协调时，算法的性能将受到严重的影响。

由于传统固定步长 LMS 算法存在不可避免的缺陷，人们将目光投向了新的变步长 LMS 自适应算法的研究。目前，被普遍采用的方法是：使步长因子 μ 与误差 $e(n)$ 满足一定的非线性关系，在权值系数的递推过程中，根据当前误差的大小调整标准 LMS 算法中的步长。

3 变步长 LMS 算法

LMS 算法改变步长应遵循的原则是：在权值系数距离最佳权值系数较远的时候，使用较大的步长加大收敛速度；在权值系数接近最佳权值系数的时候，使用较小的步长，从而获得较小的均方误差。

尽管有许多学者提出了不同的变步长 LMS 算法，但仍然没有一种能够较好地解决固定步长自适应算法存在的收敛速度、跟踪精度和收敛精度之间的矛盾。

3.1 常见的变步长算法

文献[4]在仔细分析了几种典型的变步长算法的基础上，总结出这样一种思路：在初始收敛阶段或未知系统参数发生变化时，步长应比较大，以便有较快的收敛速度和对时变系统的跟踪速度；而在算法收敛后，不管主输入干扰有多大，都应保持很小的调整步长，以达到很小的稳态误差。

文献[4]还提出了基于 Sigmoid 函数的变步长 LMS 算法，简称 SVSLMS，即 μ 是 $e(n)$ 的 Sigmoid 函数，表达式如式(3)所示：

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - X^T(n)w(n) \\ \mu(n) &= b \left\{ \frac{1}{\exp(-a|e(n)|) + 1} \right\} \\ w(n+1) &= w(n) + 2\mu(n)e(n)X(n) \end{aligned} \quad (3)$$

其中， a 是控制 S 函数形状的常数，决定曲线上升的速度； b 是控制 S 函数幅值的常数； $\mu(n)$ 随着 $e(n)$ 的增大而增大，但不会超过 $b/2$ 。根据固定步长 LMS 算法的收敛条件，可得出 b 的最大值 $b_{\max} = 2/\lambda_{\max}$ 。

文献[5]在分析了 SVSLMS 算法优缺点的基础上，提出了基于箕舌线的变步长 LMS 算法，如式(4)：

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - X^T(n)w(n) \\ \mu(n) &= a \left\{ 1 - \frac{1}{b \times e^2(n) + 1} \right\} \\ w(n+1) &= w(n) + 2\mu(n)e(n)X(n) \end{aligned} \quad (4)$$

其中， a 是幅值调整系数， b 是波形控制系数。因箕舌线有最大值，常数 a 也具有最大值 $1/\lambda_{\max}$ 。

与其它的变步长算法相比，以上两种算法性能优良，在收敛速度、跟踪速度和稳定性等方面取得了较好的效果。

3.2 基于抽样函数的 LMS 算法

根据以上的算法分析可知，理想的步长和误差关系曲线应具有如下特征^[5]：零点附近的一定范围内，曲线应尽可能保持平滑且步长值应较小，不能随误差的

增加迅速增大，以满足系统对于鲁棒性的要求；在远离零点的区域，随着误差的增加，步长应随其单调增加且应有较大的增速，以满足算法快速收敛的要求。

基于抽样函数的 LMS 算法也具有这样的特征，其迭代公式如式(5)所示：

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - X^T(n)w(n) \\ \mu(n) &= a \left\{ 1 - \frac{\sin[b \times e(n)]}{b \times e(n)} \right\} \\ w(n+1) &= w(n) + 2\mu(n)e(n)X(n) \end{aligned} \quad (5)$$

其中， a 是控制步长 $\mu(n)$ 大小的参数，存在最大值，约为 $0.8/\lambda_{\max}$ ； b 控制曲线上升的快慢，与算法的收敛速度和跟踪速度相关。使变步长LMS算法收敛的条件^[3]仍为 $0 < \mu(n) < \lambda_{\max}$ ，根据抽样函数在 $3\pi/2$ 处具有最小值的特点，又有式 $\mu(n) < [1 + 2/(3\pi)]a$ 成立，由此可计算出 a 的最大值，当 $0 < a < 0.8/\lambda_{\max}$ 时，该算法一定收敛。

变步长LMS算法比固定步长LMS算法的收敛速度和跟踪速度更快。在初始收敛和跟踪阶段，误差值较大， $\mu(n)$ 也比较大；在收敛稳态阶段，误差较小， $\mu(n)$ 值趋近于0，调整作用减小，保证系统稳态误差较小。

以上三种变步长LMS算法的步长与误差关系曲线图如图1所示：

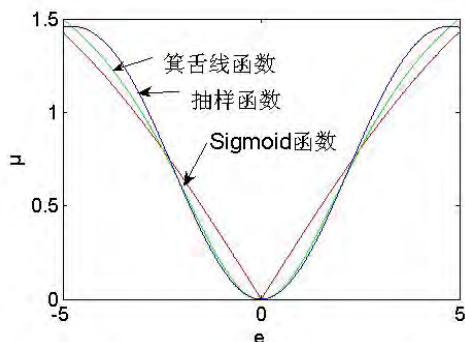


Figure 1. Sketch map of the relationship between step and error

图 1. 步长与误差的关系曲线示意图

从图1可看出，抽样函数在误差远离零点时不单调，而且存在旁瓣，但是误差只存在于特定的区间内，只要合理调整参数，可以保证 $\mu(n)$ 随误差的变化情况满足权值调整的要求，也可以使旁瓣幅度保持在较小范围内，不至于影响算法的整体性能。

SVSLMS算法和基于箕舌线的变步长算法在稳态阶段， $d\mu/de$ 相对较大，这就意味着 e 的微小变化将导致 μ 产生较大的变化，引起稳态误差的增大，并且这种情况还会随着收敛速度的提高而加剧。基于抽样函数的变步长算法能弥补这样的不足^[3]：只要参数适当，在保证与SVSLMS算法和基于箕舌线的变步长LMS算法具有相同误差的前提下，可以使基于抽样函数的LMS算法在自适应初始阶段具有更大步长和收敛速度，而在稳态自适应阶段则有更小步长，且 $d\mu/de$ 值更小。可见，抽样函数变换函数用于变步长LMS算法，理论上比箕舌线变换函数和S函数要好。

4 改进的误差扩散法

将基于抽样函数的LMS算法应用到误差扩散法中，动态地调整误差扩散滤波器，在获得和一般误差扩散算法相同的图像效果的同时，还能有效的防止一般误差扩散算法中产生的人工纹理现象。

4.1 算法的改进

本实验以Matlab7.0软件为平台，通过与FS算法和基于固定步长LMS算法改进的算法对比，考察基于抽样函数的变步长LMS算法改进的动态误差扩散法对于图像加网质量的影响。

改进后的算法在步长和误差之间建立了合理的非线性对应关系，能动态微调误差滤波器系数，其初始值使用Floyd-Steinberg滤波器。传统的误差扩散法中滤波器的各系数总和为正数，而在自适应误差扩散法中滤波器系数可能为负数；传统算法的误差分配系数总和为1，而且自适应算法的误差分配系数之和的绝对值可能大于1，可能会引起稳定问题。为避免这样的情况出现，在权值迭代调整的过程中，还应该对各滤波器系数进行归一化处理。算法流程如图2所示：

4.2 实验结果

实验分别用传统FS误差扩散算法、固定步长LMS算法和基于抽样函数的变步长LMS算法对同一幅灰度图像进行了加网处理，效果如图3所示。

图3(a)为原始灰度图像，它层次丰富，特征鲜明。图3(b)为使用传统FS误差扩散算法处理后的图像，直观地讲，FS算法对原图进行了“模糊处理”，使原来鲜明的层次对比变得柔和，物体的轮廓也变得模糊不清，部分阶调出现了较为规则的人工纹理，尤其在蓝天和白云的部分十分明显。图3(c)为使用固定步长 $\mu=0.05$

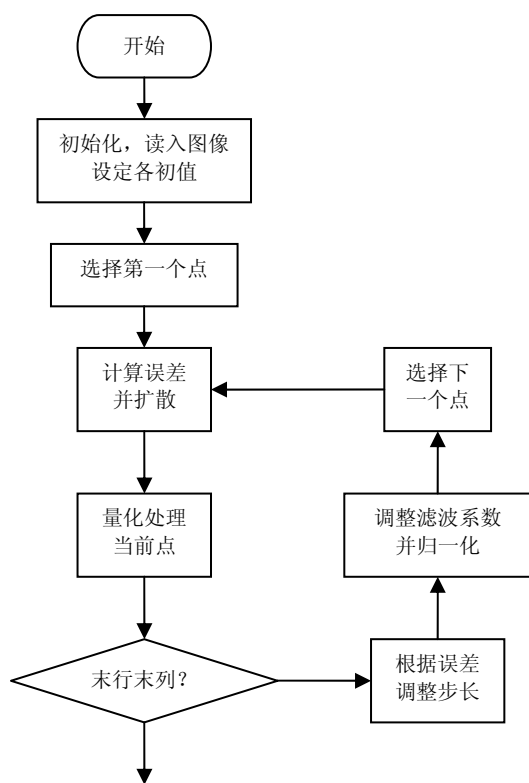


Figure 2. Flow chart of the modified algorithm

图 2. 改进型算法的流程图

的 LMS 误差扩散法处理的图像，和 FS 算法相反，固定步长 LMS 算法对图像进行了“锐化处理”，它考虑了图像的特征和各相邻像素点间的联系，使物体的轮廓更加清晰，不同层次间的对比增强。图 3(d)为使用基于抽样函数的变步长 LMS 算法改进的 FS 误差扩散法处理的图像，它保留了 FS 算法加网质量好的优点，同时更大程度地再现了更多的细节。

5 结束语

传统 FS 误差扩散法的处理效果本身就比较不错，但由于它具有误差分配路线固定、扩散范围较小和系数不可调整等不足，使得处理的图像在明亮和黑暗区域、以及某些特定的灰度上产生较为明显的规则纹理，影响视觉效果。

LMS 算法根据图像特征动态地调整误差分配系数，具有较强的适应性和处理能力。



(a) Original gray image

(b) FS error diffusion

(a) 原始灰度图像

(b) FS 误差扩散法



(c) Traditional LMS algorithm

(d) Modified LMS algorithm

(c) 固定步长 LMS 算法

(d) 改进型变步长 LMS 算法

Figure 3. Results of the algorithms

图 3. 各算法的处理效果

References (参考文献)

- [1] YAO Haigen, Digital Screening Technology[M], Beijing: Printing Industry Press, 2000(Ch). 姚海根, 数字加网技术[M], 北京: 印刷工业出版社, 2000.
- [2] Widrow B, McCool J. A Comparison of Adaptive Algorithms Based on the Methods of Steepest Descent and Random Search[J]. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 1976, 24(5), P615-637.
- [3] Zhan Guoqiang, Wu Zhengguo, A novel variable step size adaptive filtering LMS Algorithm based on sample function[J], Journal of Naval University of Engineering, 2006, 18(2), P109-112(Ch). 詹国强, 吴正国, 一种新的变步长 LMS 自适应滤波算法[J], 海军工程大学学报[J], 2006, 18 (2), P109-112.
- [4] Tan Jingfanm OuYang Jingzheng, A novel variable step size adaptive filtering LMS Algorithm based on sample function[J], Journal of Data Acquisition & Processing, 1997, 12(3), P171-174(Ch). 覃景繁, 欧阳景正, 一种新的变步长 LMS 自适应滤波算法[J], 数据采集与处理, 1997, 12 (3), P171-174.
- [5] Deng Jiangbo, Hou Xinguo, Wu Zhengguo, Variable Step Adaptive Filtering LMS Algorithm Based on Tongue-Like Curve[J], Journal of Data Acquisition & Processing, 2004, 19(3), P282-285(Ch). 邓江波, 侯兴国, 吴正国, 基于舌状线的变步长 LMS 自适应滤波算法[J], 数据采集与处理, 2004, 19 (3), P282-285.