Construction of Symmetric and Semi-Orthogonal Scalar Wavelets Based on the Auto-Correlation Functions

CEN Yigang, LIANG Mangui
School of Computer and Information Technology, Beijing Jiaotong University, Beijing, China
e-mail: cenyigang@163.com

Abstract: In the wavelet theory, the construction of symmetric and compactly supported scaling and wavelet functions is an important problem. For the scalar wavelet, except the Haar wavelet, there are no wavelets possess compactly supports, orthogonality and symmetry simultaneously. In this paper, based on the auto-correlation functions of the compactly supported scaling functions, a general construction approach for the construction of semi-orthogonal wavelets with compactly supports, symmetry and linear phase is proposed. Related proofs are also given.

Keywords: semi-orthogonal wavelets; auto-correlation; construction of wavelets

基于自相关函数的对称半正交单小波构造

岑翼刚，梁满贵
北京交通大学计算机与信息技术学院，北京，中国，100044
e-mail: cenyigang@163.com

【摘　要】小波理论中，在 MRA 中设计对称及紧支撑尺度函数和小波函数是很重要的一个研究课题。然而在单小波中，除了 Haar 小波兼具对称性、紧支撑性、正交性外，其它任何紧支撑和正交性的尺度函数和小波函数均不具备对称性。本文基于紧支撑尺度函数自相关函数，提出了一个构造具有紧支撑、对称性、线性相位的半正交尺度函数和小波函数的一般性方法，并给出了理论证明。

【关键词】半正交小波; 自相关; 小波构造; 对称性

1 引言

在传统的小波函数中，小波函数的对称性、正交性和有限支撑是应用中必须要考虑的问题，不同的小波函数对于应用的效果也很不一样。紧支撑性决定了在小波分解和重构过程中滤波器的长度，支撑集越小，滤波器越短，局域化性能越强，但支撑集小的同时也制约了逼近性，使得信号或图像的光滑性变差；正交性使得信号分解后得到的各个子带分别处在相互正交的 $L^2(R)$ 子空间中，子带之间的相关性为零，有利于信号重构；图像处理中，对称性(线性相位)既适合于人眼的视觉系统,又使信号在边界易于处理。而单小波中除了 Haar 小波兼具有上述三个特性外，其它任何具有紧支撑及正交性的小波均不具备对称性。但 Haar 小波支撑集太小，逼近性不好。因此构造新的小波函数使其具有良好的性质成为小波研究的难点和热点，例如多小波的构造及应用[1,2]。

国家自然科学基金资助项目(60802045)
机器人学国家重点实验室资助项目(RLO200801)

我们注意到，样条小波的构造方法对于小波函数具有对称性和紧支撑是有益的，而样条小波仅仅是使用了样条函数来构造，这启发我们是否可以将其推广到一般的小波函数方面，使构造得到的新小波函数也具有对称性、紧支撑、半正交的性质。为此需要证明以下几个问题：

(1) 构造的新的尺度函数是否是一个 Riesz 基；
(2) 新尺度函数是否满足双尺度方程，从而可以作为一个 MRA 的生成元。
(3) $L^2(R)$ 是否可以分解为对应于新尺度函数的小波函数所构成的小波子空间的直和。
(4) 紧支撑的尺度函数通过不断的自相关是否可以生成一系列的尺度函数，并且有一系列的小波函数与之相对应，使其构成不同的 MRA。

基于以上的想法，我们提出了基于紧支撑尺度函数自相关构造具有紧支撑、对称性的半正交尺度函数和小波函数的一般性方法，并给出了理论证明。

2 自相关函数的性质及其在 MRA 中的应用

设$\phi(x)\in L^2(R)$是一紧支撑的实函数，其自相关函数为$F(x)=\int_R\phi(\tau)\phi(\tau+x)d\tau$，设$F_2(x)$为$F(x)$的自相关函数，…，$F_n(x)$为$F_{n-1}(x)$的自相关函数，…。则$F_n(x)$ 是 R 上一致连续的偶函数，$F_n(x)$具有紧支撑且$F_n(x)\in L^1(R)\cap L^2(R)$。可以验证，$\hat{F}(\omega)=\left|\hat{\phi}(\omega)\right|^2$，其中$\hat{F}$和$\hat{\phi}$分别为$F$和$\phi$的傅立叶变换。

定理 1. 设$\phi(x)\in L^1(R)\cap L^2(R)$是紧支撑的实函数且满足 Riesz 条件，则$\sum_{k\in Z}\left|\hat{\phi}(\omega+2\pi k)\right|^{2^n}$是 R 上处处正的、连续的且有一致正下界的、周期的偶函数。

该定理证明略。作为上述紧支撑函数的自相关函数特性的一个应用，以下将给出一个一般性的方法用以设计一个 MRA，其具有下述特点：

1) 具有偶对称和紧支撑的尺度函数。
2) 尺度函数和小波函数均具有广义线性相位，即尺度和小波函数是对称或反对称的。
3) $L^2(R)$空间可分解为小波子空间的直和。

定理 2. 如果$\phi(x)\in L^1(R)\cap L^2(R)$是$L^2(R)$上某 MRA 的具有紧支撑的生成元，则其自相关函数$F(x)$也是$L^2(R)$某个 MRA 的一个偶对称及紧支撑的生成元。

证明：(1)令$V_0=clos_{L^2(R)}\{F(x-k),k\in Z\}$，首先证明$F(x)$是$V_0$的一个紧支撑、偶对称的 Riesz 基。由前述，$F(x)$的紧支撑性和偶对称是显然的。由于$\phi(x)$是$L^2(R)$上某一 MRA 的生成元，故$\{\phi(x-k),k\in z\}$是一 Riesz 基，即存在 $0<A\le B<+\infty$ 使得

$$0<A\le\sum_{k\in Z}\left|\hat{\phi}(\omega+2\pi k)\right|^2\le B<+\infty$$

故，$\sum_{k\in Z}\left|\hat{F}(\omega+2\pi k)\right|^2$

$=\sum_{k\in Z}\left|\hat{\phi}(\omega+2\pi k)\right|^4\le\left(\sum_{k\in Z}\left|\hat{\phi}(\omega+2\pi k)\right|^2\right)^2\le B^2<+\infty$。另外，由定理 1，存在$A_1>0$使得$\sum_{k\in Z}\left|\hat{F}(\omega+2\pi k)\right|^2\ge A_1>0$，$\forall\omega\in R$。因此$0<A_1\le\sum_{k\in Z}\left|\hat{F}(\omega+2\pi k)\right|^2\le B^2=B_1<+\infty$

(2) 下面证明，设$\phi(x)$具有双尺度方程：$\phi(x)=\sum_{n=0}^N h_n\phi(2x-n)$，则$F(x)$也具有双尺度方程：$F(x)=\sum_{n=-N}^N a_nF(2x-n)$，此处$\forall n\ge 0$，$a_n=2^{-1}\sum_{j=0}^{N-n}h_jh_{j+n}$；若$-N\le n\le -1$，则$a_n=a_{-n}$，即$\{a_n\}_{n=-N}^N$为对称的。

实际上，$F(x)=\int_R\phi(\tau)\phi(\tau-x)d\tau$

$$=\int_R\left[\sum_{j=0}^N h_j\phi(2\tau-j)\right]\left[\sum_{k=0}^N h_k\phi(2\tau-2x-k)\right]d\tau$$

$$=\sum_{j=0}^N\sum_{k=0}^N h_jh_k\int_R\phi(2\tau-j)\phi(2\tau-2x-k)d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^N\sum_{k=0}^N h_jh_k\int_R\phi(y)\phi(y-2x-k+j)dy$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^N\sum_{k=0}^N h_jh_kF(2x+k-j).$$

令$n=j-k$，得

$$F(x)=\sum_{n=-N}^N\left(2^{-1}\sum_{j=0}^{N-n}h_jh_{j+n}\right)F(2x-n)\text{。}$$

$$=2^{-1/2}\sum_{n=-N}^N a_nF_{1,n}(x)$$

令 $F_{j,k}(x)=2^{j/2}F(2^jx-k)$，$V_j=clos_{L^2(R)}\{F_{j,k}(x),k\in Z\}$。显然，$V_j\subset V_{j+1}$，因此，$F_{j,k}(x)=2^{-1/2}\sum_{n=-N}^N a_nF_{j+1,2k+j}(x)$，所以，$\{F_{j,k}(x),k\in z\}$是$V_j$的 Riesz 基。

综合(1)和(2)可知，$L^2(R)$的一个 MRA 的紧支撑函数的自相关函数构成$L^2(R)$的另一个 MRA 的生成元，且该自相关函数是紧支撑和偶对称的，证毕。

由上述定理知，若$\phi(x)$为一紧支撑尺度函数，则其自相关函数$F(x)$也为一具有偶对称及紧支撑的尺度函数，$F(x)$的对偶尺度函数可由$\hat{\tilde{F}}(z)=\hat{F}(z)/E_F(z^2)$给出，其中$E_F(z)=\Phi_{F_2}(\omega)=\sum_{k\in Z}|\hat{\phi}(\omega+2\pi k)|^4=\sum_{k\in Z}F_2(k)z^k$。

设$P_F(z)$为$F(x)$的两尺度符号，则$\tilde{F}(x)$对应的两尺度符号为$G^*(z)=E_F(z)P_F(z)/E_F(z^2)$。定理 1 和 2 启发我们可以设计一个对称或反对称、紧支撑的小波对$\Psi(x)$及$\tilde{\Psi}(x)$使其分别与$F(x)$与$\tilde{F}(x)$相对应。

令$\phi(x)$为一个尺度函数，其两尺度符号为$P(z)=2^{-1}\sum_k p_kz^k$，$|z|=1$，$\{p_k\}\in l^1$。则有

$$V_0=clos_{L^2(R)}\{\phi(x-k);k\in Z\},$$

978-1-935068-06-8 © 2009 SciRes.

$V_1 = clos_{L^2(R)}\left\{\sqrt{2}\phi(2x-k); k\in Z\right\}$。

另一 l^1 序列 $\{q_k\}$ 及其符号 $Q(z)=2^{-1}\sum_k q_k z^k$ 在 V_1 中定义了一个函数：$\psi(x)=\sum_k q_k\phi(2x-k)$，则 $W_0 = clos_{L^2(R)}\{\psi(x-k); k\in Z\}$。

引理 1. 设 $\Delta_{P,Q}(z)=\det \mathrm{M}_{P,Q}(z)$，$\mathrm{M}_{P,Q}(z)=\begin{bmatrix} P(z) & Q(z) \\ P(-z) & Q(-z)\end{bmatrix}$，$P(z)$，$Q(z)$ 分别为 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的符号。则直和 $V_1 = V_0 \dotplus W_0$ 成立，当且仅当在单位圆 $|z|=1$ 上有 $\Delta_{P,Q}(z)\neq 0$ [3]。

定理 3. 令 $\phi(x)$ 为 $L^2(R)$ 上某 MRA 的紧支撑尺度函数，$F(x)$ 为其自相关函数，若 $\Psi(x)$ 对应的两尺度符号由 $Q_\Psi(z)=(-z)^{2l-1}E_F(-z)P_F(-z)$，$l\in Z$ 给出，则 $\Delta_{P_F,Q_\Psi}(z)\neq 0$，$\forall |z|=1$。

证明：由定理 2 及其证明，有

$$P_F(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n = \frac{1}{4}\left(\sum_{j=0}^{N} h_j z^j\right)\left(\sum_{k=0}^{N} h_k z^{-k}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N} h_j z^j\right)\overline{\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} h_k z^k\right)} = |P_\phi(z)|^2，\ |z|=1。$$

由此有，$P_F^2(z)=|P_F(z)|^2=|P_\phi(z)|^4$。从而

$$\Delta_{P_F,Q_\Psi}(z)=\det\begin{bmatrix} P_F(z) & Q_\Psi(z) \\ P_F(-z) & Q_\Psi(-z)\end{bmatrix}$$

$$=P_F(z)Q_\Psi(-z)-P_F(-z)Q_\Psi(z)$$

$$=z^{2l-1}E_F(z)P_F^2(z)+z^{2l-1}E_F(-z)P_F^2(-z)$$

$$=z^{2l-1}[E_F(z)P_F^2(z)+E_F(-z)P_F^2(-z)]$$

由[3]，有

$E_F(z)P_F^2(z)+E_F(-z)P_F^2(-z)=E_F(z^2)$，代入上式，得 $\Delta_{P_F,Q_\Psi}(z)=z^{2l-1}E_F(z^2)\neq 0$，$\forall |z|=1$。证毕。

现在，令 $V_0 = clos_{L^2(R)}\{F(x-k); k\in Z\}$，$W_0 = clos_{L^2(R)}\{\Psi(x-k); k\in Z\}$，$V_1 = clos_{L^2(R)}\{\sqrt{2}F(x-k); k\in Z\}$，则 $V_1 = V_0\dotplus W_0$. 类似有，$V_{j+1}=V_j\dotplus W_j$，因此

$$L^2(R)=\cdots\dotplus W_{-1}\dotplus W_0\dotplus W_1\dotplus\cdots\dotplus W_j\dotplus\cdots$$

此处，$V_j = clos_{L^2(R)}\{2^{j/2}F(2^j x-k); k\in Z\}$，$W_j = clos_{L^2(R)}\{2^{j/2}\Psi(2^j x-k); k\in Z\}$。容易证明：(1) $\Psi(x)$ 是紧支撑的，因为 $Q_\Psi(z)$ 是一个有限两尺度符号且 $F(x)$ 为紧支撑的。(2) $\Psi(x)$ 具有广义线性相位，因此知 $\Psi(x)$ 是对称或反对称。更进一步知 $\Psi(x)$ 是一个半正交小波。其对偶小波 $\tilde{\Psi}(x)$ 由两尺度符号

$$H^*(x)=\overline{[-(-\frac{1}{z})^{2l-1}\frac{P_F(-z)}{E_F(z^2)}]}=-z^{2l-1}\frac{P_F(-z)}{E_F(z^2)},|z|=1$$

[3] 给出。(证明略)

该式中，若 $E_F(z^2)$ 不是一个常数，则对偶小波 $\tilde{\Psi}(x)$ 不具备紧支撑性。综上所述，有以下结论：

定理 4. 如果 $\phi(x)$ 是 $L^2(R)$ 空间中某个 MRA 的紧支撑尺度函数，则其自相关函数 $F(x)$ 是 $L^2(R)$ 中另一个 MRA 的尺度函数，且其是偶对称的。对应于 $F(x)$，我们可以构造一个对称或反对称、紧支撑、半正交的小波函数，使得 $L^2(R)$ 可以分解为由 $\Psi(x)$ 所构成的小波子空间的直和。

定理 5. 令 $\phi(x)$ 为 $L^2(R)$ 中某 MRA 的紧支撑尺度函数，$F_1(x)$ 为其自相关函数 $\cdots F_n(x)$ 是 $F_{n-1}(x)$ 的自相关函数。则 $F_n(x)$ 是 $L^2(R)$ 中另一 MRA 的偶对称的尺度函数。由

$$Q_{\Psi_n}(z)=(-z)^{2l-1}E_{F_n}(-z)P_{F_n}(-z),\ l\in Z$$

可以构造一个半正交小波函数 $\Psi_n(x)$，该小波函数具有紧支撑、广义线性相位、对称或反对称的性质，且使得 $L^2(R)=\cdots\dotplus W_{-1}\dotplus W_0\dotplus W_1\dotplus\cdots\dotplus W_j\dotplus\cdots$。

备注：本文中所提出的紧支撑对称小波函数的构造方法是受到了紧支撑样条小波构造的启发。紧支撑样条小波是对称、紧支撑的半正交小波。而本文针对于一般的紧支撑小波，即只要尺度函数和小波函数为紧支撑的，则均可通过本文方法来构造一个具有紧支撑、对称、广义线性相位的半正交小波及其尺度函数，这些性质与样条小波的性质相似。且 $L^2(R)$ 空间可分解为本文构造出来的小波函数所构成的分解子空间的直和，这与文献[4,5]中利用 Daubechies 尺度和小波函数分别作自相关函数的情形是不一样的，根据引理 1 可以证明，文献[4,5]中得到的新的小波分解子空间不构成 $L^2(R)$ 空间的直和分解。证明此处略。

3 结论

本文提出了一类具有紧支撑、对称性、线性相位、半正交性质的单小波的构造方法。即只要原来的尺度函数具有紧支撑性，则均可通过其不断的进行自

相关构造出一系列具有上述性质的尺度函数。文中证明了对应于自相关尺度函数的小波函数的存在性，并给出了其滤波器的构造公式。新构造的单小波在应用中的分解和重构算法与紧支撑样条小波相似。由于构造的小波和尺度函数具有对称性，这使得其在实际应用中具备一定的理论和实践价值。

References (参考文献)

[1] J. S. Geronimo, D. P. Hardin and P. R. Massopust, Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions[J], J. Approx. Theory, 1994, 78 (9), P373-401.

[2] C. K. Chui and J. Lian, A study on orthonormal multiwavelets [J], Appl. Numer. Math., 1996, 20 (3), P273-298.

[3] C. K. Chui. An introduction to wavelets[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1995.
崔锦泰，小波分析导论，第 1 版, 程正兴, 白居宪译, 西安: 西安交通大学出版社, 1995.

[4] N. Saito and G. Beylkin, Multiresolution representations using the auto-correlation functions of compactly supported wavelets [J], IEEE Trans. on Signal Processing, 1993, 41(12), pp. 3584-3590.

[5] N. Saito and G. Beylkin, Multiresolution representations using the auto-correlation functions of compactly supported wavelets [C]. Proceeding of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, San Francisco, CA. 1992, pp. 381-384.

978-1-935068-06-8 © 2009 SciRes.