Scientific Research

A New Method for Determining Objective Weights of Experts in Fuzzy Multi-Attribute Group Decision Making

Lingfu Kong, Zhihui Zhang, Jianzhou Feng

College of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao

Email: address:qhdhui@163.com

Abstract: Based on the subjective weights of experts, a new method for determining the objective weights is proposed. The method simultaneously takes the order difference and the data difference of the alternatives as the similarity index of measuring the individuals and group, and the order difference's existence is prior to determine whether the data difference takes part in the calculation. Based on the similarity index, a new similarity function is defined to determine the objective weights of experts. Finally an example shows that the method is feasible.

Keywords: objective weights; order difference; data difference; similarity

模糊多属性群决策中确定专家客观权重的新方法

孔令富，张智慧，冯建周

燕山大学信息科学与工程学院，秦皇岛，066004

Email: address:qhdhui@163.com

摘　要：在已知专家主观权重的基础上，提出了一种新的确定专家客观权重的方法。该方法将决策结果中方案的排序差异和数值差异同时作为衡量个体与群体相似性的指标，同时排序差异的有无优先决定着数值差异是否参与计算。文中根据这个相似性指标定义了一个新的相似度函数，来确定专家的客观权重。给出的数例说明了该方法的可行性。

关键词：客观权重；排序差异；数值差异；相似度

1 引言

在多属性群决策中，需要集结各个专家的决策信息得到群体的决策结果，而在集结的过程中，每个专家的重要性程度的确定是至关重要的。目前专家权重的确定方法大体上分为三类[1]：一类是主观赋权法，即根据专家的知名度、对问题的熟悉程度等来确定权重，但决策结果具有很大的主观随意性；一类是客观赋权法，即根据专家给出的决策矩阵信息来确定专家权重，决策结果虽然具有较强的数学理论依据，但有时会与各专家的实际重要程度相悖；最后是主客观综合赋权法。

近年来众多学者对此发表了诸多的研究文献，例如宋光兴，邹平[2]提出通过判断矩阵的一致性程度及判断矩阵之间相似程度的凸组合作为决策者的客观权重；魏存平[3]等定义了一个新的相似性函数，采用相似性测度来确定决策者权重； His-MeiHsu,Chen-Tung Chen[4]提出运用两个梯形数的相似性得到相似矩阵从而得到每个专家的一致性权重； A. İ. Ölçer, A.Y.Odabaşi[5]通过比较各个专家的相对重要性得到专家的权重。

本文综合考虑了个体与群体决策结果的排序差异和数值差异两个方面，在模糊多属性群决策的环境下，给出了一个新的相似度的定义，以此来确定专家的客观权重，然后与主观权重进行线性组合进而得到专家的综合权重。

2 基础理论知识

2.1 三角模糊数的定义及运算法则

定义 1[6]　一个模糊数 $\tilde{N}$ 是定义在实数域 R 上的正规凸模糊集，且满足以下条件：

(1) 存在唯一的点 $x_0 \in R$，具有隶属度 $\mu_{\tilde{N}}(x_0)=1$（x_0 被称为 $\tilde{N}$ 的平均值），

978-1-935068-15-0 © 2010 SciRes.

(2) 隶属函数 $\mu_{\tilde{N}}(x)$ 是左右连续的。

模糊数 $\tilde{N}$ 的一般表示式可以写为

$$\mu_{\tilde{N}}(x)=\begin{cases}L(x), & l\le x\le m,\\ R(x), & m\le x\le r,\end{cases} \tag{1}$$

式中，$L(x)$为增函数，右连续，且 $0\le L(x)\le 1$；$R(x)$为减函数，左连续，且 $0\leqslant R(x)\leqslant 1$. 如果 $L(x)$与 $R(x)$均为线性函数，则 $\tilde{N}$ 被称为三角模糊数，简记为 $\tilde{N}=(l,m,r)$.

如果 $\tilde{A}_1=(l_1,m_1,r_1)$，$\tilde{A}_2=(l_2,m_2,r_2)$ 是两个三角模糊数，则二者的和、差、积、商也是三角模糊数，记为[7-8]：

$\tilde{A}_1+\tilde{A}_2=(l_1+l_2,m_1+m_2,r_1+r_2)$，

$\tilde{A}_1-\tilde{A}_2=(l_1-r_2,m_1-m_2,r_1-l_2)$，

$\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2=(l_1l_2,m_1m_2,r_1r_2)$，

$\tilde{A}_1/\tilde{A}_2=(l_1/r_2,m_1/m_2,r_1/l_2)$.

2.2 模糊指标值的归一化[6]

设三角模糊数 $\tilde{x}_i=(a_i,b_i,c_i)$，归一化后的模糊指标值为 $\tilde{r}_i$， $i=1,\ldots,m$.

1）收益类模糊指标值的归一化

$$\tilde{r}_i=\left(\frac{a_i}{c_i^{\max}},\frac{b_i}{b_i^{\max}},\frac{c_i}{a_i^{\max}}\wedge 1\right) \tag{2}$$

2) 成本类模糊指标值的归一化

$$\tilde{r}_i=\left(\frac{a_i^{\min}}{c_i},\frac{b_i^{\min}}{b_i},\frac{c_i^{\min}}{a_i}\wedge 1\right) \tag{3}$$

2.3 两个三角模糊数之间的距离

参考文献[9]中两个三角模糊数之间距离的定义，本文定义了一种新的计算两个三角模糊数之间距离的公式：

定义 2（两个三角模糊向量之间的模糊距离）对于两个模糊向量 $\tilde{\tilde{F}}=\{\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\ldots,\tilde{A}_m\}$ 和 $\tilde{\tilde{F}}'=\{\tilde{A}'_1,\tilde{A}'_2,\ldots,\tilde{A}'_m\}$ ，若 $\tilde{A}_i=(a_i,b_i,c_i)$ 和 $\tilde{A}'_i=(a'_i,b'_i,c'_i)$ 分别为它们的第 i 个元素，并且这两个三角模糊数之间的距离为：

$$d(\tilde{A}_i,\tilde{A}'_i)=\sqrt{\frac{1}{3}\left[(a_i-a_i')^2+(b_i-b_i')^2+(c_i-c_i')^2\right]} \tag{4}$$

那么这两个模糊向量之间的距离定义为：

$$d(\tilde{\tilde{F}},\tilde{\tilde{F}}')=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}d(\tilde{A}_i,\tilde{A}_i')^2},\ i=1,2,\ldots,m \tag{5}$$

2.4 模糊数的比较和排序方法

Lee-Li 的方法考虑了模糊集的散布程度，分辨力较高，而且对于常见的三角模糊数计算十分简便，保持了模糊概念的完整性和一致性。

对于常见的三角模糊数 $\tilde{A}=(a,b,c)$，其均值和标准偏差为[6]

$$m_U(\tilde{A})=\frac{a+b+c}{3} \tag{6}$$

$$\sigma_U^2(\tilde{A})=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18} \tag{7}$$

Lee-Li 定义的模糊集综合排序指标：

$$F(\tilde{A})=\beta m(\tilde{A})+(1-\beta)[1-\sigma(\tilde{A})] \tag{8}$$

这里的 β 是由决策者选定的权值，它反映了均值与偏差在决策者心目中的相对重要程度，这里 β 取 0.5。

2.5 计算排序差异

对于 m 个元素有 n+1 组排序，以其中一组作为标准排序计算其他 n 组非标准排序与标准排序的差值，比较同一元素在标准和非标准排序中的位置，根据标准排序中元素的顺序依次计算它们在每组排序中的位置差 x，设第 j 个元素在第 i 个非标准排序中的位置差为 x_{ij},那么这个非标准排序与标准排序的顺序差异为：

$$t_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}x_{ij}} \tag{9}$$

其中 $i=1,2,\ldots,n$；$j=1,2,\ldots,m$；$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$ 为元素 j 在各个非标准排序中的位置差总和。归一化得到这几个非标准排序的相对排序差异：$T_i=t_i/m,\ i=1,2,\ldots,n.$

例如：有 5 组排序{1,5,2,3,4}，{2,1,3,4,5}，{3,5,2,1,4}，{4,1,3,2,5}，{5,3,1,4,2}，以第一组为基准排序，计算其他四组的差值得：

t_1={1,3,2,1,1},t_2={3,0,0,3,0},t_3={1,3,1,1,4},t_4={2,1,2,2,1}

根据上式计算并归一化得到相对排序差异为：

T_1=0.2562, T_2=0.1714, T_3=0.3162, T_4=0.2562

3 客观权重的确定方法与步骤

3.1 问题描述：

设模糊多属性群决策问题中有 s 名专家 $J_1,J_2,\ldots,J_s$，对 m 个可能的方案 $A_1,A_2,\ldots,A_m$ 就属性 $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 进行模糊评价，各个专家的主观权重已经给出，专家 J_k 对方案 A_i 给出的模糊评价矩阵为 $\tilde{A}^k=(\tilde{a}_{ij}^k)_{m\times n}$，$k=1,2,\ldots,s$; $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$.式

中 $\widetilde{a}_{ij}^{k}$ 是专家 J_k 对方案 A_i 的第 j 个属性的模糊评价值。同时专家根据 1-9 比例标度给出属性间相对重要程度的判断矩阵，根据判断矩阵来计算得到属性的权值 w.

专家的主观权重 λ_1^k 已知，客观权重 $\widetilde{\lambda}_2^k$ 未知，则第 k 名专家的综合权重为：

$$\lambda^k = 0.5(\lambda_1^k + \lambda_2^k) \tag{10}$$

3.2 方法

我们知道群决策的目的是对所给的方案进行评价排序并选出最优的一个，那么单一的数值上的差异程度并不能完全代表两者的不一致性程度，顺序上的差异才是最应该首先考虑的因素。如果一个个体的决策结果中各个方案的排列顺序与群体决策结果的各方案排序完全一致，那么他就应该给予最大的权重，因为不论它们在数值上是否存在差异都不会影响到群体的结果；而一个与群体决策结果的方案排序不同的个体，它们在数值上必定存在着差异，那么此时就要同时考虑顺序差异和数值差异这两个方面。也就是说，顺序差异是优先考虑的，当两者存在顺序差异时，才需要进一步考虑数值上的差异。为此，本文给出了一个新的相似度的定义：

定义 3 对于具有相同的元素个数的两个向量，设它们在元素的排列顺序上的差异为 T，$0 \leqslant T \leqslant 1$，两向量在数值上的差异为 D，$0 \leqslant D \leqslant 1$，则这两个向量的相似度 S 为：

$$S = 1 - \frac{1}{2}(T + T \cdot D) \tag{11}$$

首先根据专家给出的模糊决策矩阵，分别计算得到各专家的模糊效用函数值和群体综合效用函数值，并对各效用函数中的方案进行排序，求出各个专家的决策结果中方案排序的差异值，然后计算个体决策结果和群体决策结果的数值差异，最后通过定义 3 计算得到每个专家的客观权值。

3.3 算法步骤

这里专家给出的模糊评价值用三角模糊数来表示。具体的算法步骤如下：

步骤 1 根据公式(2)和(3)对 s 个专家所给的模糊评价矩阵进行归一化。

步骤 2 计算各个专家给出的属性判断矩阵，得到属性权重向量 $W^k = [w_1^k, w_2^k, \ldots, w_n^k]^T$, $k=1,2,\ldots,s$.

步骤 3 对归一化后的模糊评价矩阵与对应的属性权重向量进行简单线性加权计算，得到每个专家的模糊效用函数 $\widetilde{F}^k = [\widetilde{f}_1^k, \widetilde{f}_2^k, \ldots, \widetilde{f}_m^k]^T$，其中 $\widetilde{f}_i^k = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{r}_{ij}^k w_j^k$, $k=1,2,\ldots,s$; $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$.

步骤 4 将所有归一化后的模糊评价矩阵和属性权重向量求平均值，得到群体综合模糊评价矩阵 $\widetilde{R}^0$ 和综合属性权重向量 w^0.

$$\widetilde{R}^0 = \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} \widetilde{r}_{ij}^k \right)_{m \times n}, \ i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n;$$

$$w^0 = \left[\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} w_1^k, \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} w_2^k, \ldots, \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} w_n^k \right]^T, \ k=1,2,\ldots,s.$$

步骤 5 对综合后的评价矩阵和属性向量进行简单线性加权计算模糊综合效用函数 $\widetilde{F}^0$.

$\widetilde{F}^0 = [\widetilde{f}_1^0, \widetilde{f}_2^0, \ldots, \widetilde{f}_m^0]^T$,其中：

$$\widetilde{f}_i^0 = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{r}_{ij}^0 w_j^0, \ i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n.$$

步骤 6 根据公式(4)、(5)计算每个专家的决策结果与群体决策结果的效用差异值 d^k,并进行归一化，处理后的结果 D^k，$k=1,2,\ldots,s$.

步骤 7 运用公式(6)、(7)、(8)对模糊效用函数值进行排序计算，得到各个专家和群体决策结果中对这 m 个方案的排列顺序，然后以群体排列顺序为基准，用公式（9）计算出每个专家排序的差值 t^k，并进行归一化处理 T^k, $k=1,2,\ldots,s$.

步骤 8 根据公式(11)计算出每个专家与群体的相似度 S^k，将其进行归一化后作为专家的客观权重 λ_2^k。

步骤 9 综合专家的主观权重，根据公式(10)计算得到各个专家的综合权重 λ^k, $k=1,2,\ldots,s$.

4 实例

某企业现有一项工程，工程师通过调研分析后，设计给出了五个方案 A1、A2、A3、A4、A5,企业请来三位专家分别从成本(C1)、安全性(C2)、可维护性(C3)和效益(C4)四个方面对其进行评价，给出了模糊评价矩阵以及各个属性的比较判断矩阵如下所示,各决策者的主观权重均为：1/3.

Table 1. Fuzzy appraisal matrix of J_1

表 1. J_1 的模糊评价矩阵

J_1	*C1*	*C2*	*C3*	*C4*
A1	(0.5,0.6,0.8)	(0.3,0.5,0.7)	(0.6,0.7,0.8)	(0.2,0.3,0.5)
A2	(0.6,0.7,0.9)	(0.2,0.3,0.5)	(0.1,0.2,0.3)	(0.3,0.5,0.6)
A3	(0.2,0.3,0.4)	(0.3,0.5,0.6)	(0.5,0.6,0.7)	(0.8,0.9,1.0)
A4	(0.2,0.3,0.5)	(0.1,0.2,0.3)	(0.2,0.4,0.5)	(0.2,0.4,0.6)
A5	(0.3,0.5,0.6)	(0.4,0.5,0.6)	(0.6,0.8,0.9)	(0.7,0.9,1.0)

978-1-935068-15-0 © 2010 SciRes.

Table 2. Fuzzy appraisal matrix of J_2
表 2. J_2 的模糊评价矩阵

J_2	C1	C2	C3	C4
A1	(0.1,0.2,0.3)	(0.2,0.3,0.4)	(0.5,0.6,0.8)	(0.3,0.5,0.6)
A2	(0.6,0.7,0.9)	(0.2,0.4,0.5)	(0.4,0.5,0.6)	(0.6,0.7,0.9)
A3	(0.2,0.3,0.4)	(0.7,0.8,0.9)	(0.3,0.4,0.6)	(0.5,0.6,0.7)
A4	(0.2,0.3,0.5)	(0.4,0.6,0.7)	(0.5,0.6,0.7)	(0.4,0.5,0.6)
A5	(0.3,0.4,0.6)	(0.6,0.7,0.8)	(0.7,0.8,1.0)	(0.7,0.8,0.9)

Table 3. Fuzzy appraisal matrix of J_3
表 3. J_3 的模糊评价矩阵

J_3	C1	C2	C3	C4
A1	(0.1,0.2,0.4)	(0.2,0.3,0.4)	(0.4,0.5,0.7)	(0.6,0.7,0.9)
A2	(0.6,0.7,0.9)	(0.1,0.2,0.3)	(0.4,0.6,0.7)	(0.5,0.6,0.7)
A3	(0.3,0.5,0.6)	(0.2,0.3,0.4)	(0.1,0.2,0.3)	(0.6,0.7,0.8)
A4	(0.2,0.3,0.4)	(0.4,0.6,0.7)	(0.2,0.4,0.5)	(0.1,0.2,0.3)
A5	(0.2,0.3,0.5)	(0.6,0.7,0.8)	(0.3,0.4,0.5)	(0.5,0.6,0.7)

各属性判断矩阵如下：

$$p^1=\begin{bmatrix}1&9&7&5\\1/9&1&1/2&1/7\\1/7&2&1&1/3\\1/5&7&3&1\end{bmatrix}\quad p^2=\begin{bmatrix}1&1/5&1/6&3\\5&1&1/3&5\\6&3&1&7\\1/3&1/5&1/7&1\end{bmatrix}$$

$$p^3=\begin{bmatrix}1&1/3&3&1/7\\3&1&6&1/2\\1/3&1/6&1&1/9\\7&2&9&1\end{bmatrix}$$

步骤 1 归一化模糊评价矩阵，计算判断矩阵得到各专家给出的属性权重向量及矩阵的最大特征值 λ：

$W^1=[0.6356,0.0486,0.0855,0.2303]^T$，λ1=4.1728

$W^2=[0.1039,0.2870,0.5536,0.0555]^T$，λ2=4.2323

$W^3=[0.1057,0.2878,0.0483,0.5582]^T$，λ3=4.0633

一致性检验：

$C.R_1=0.0576<0.1,\ C.R_2=0.0774<0.1,\ C.R_3=0.0211<0.1$

∴ 上述三个判断矩阵均满足一致性检验。

步骤 2 对归一化后的模糊评价矩阵与对应的属性权重向量进行简单线性加权计算，得到各专家和群体的模糊效用函数如下：

$\widetilde{F}^1=[(0.2828,0.5180,0.7865),(0.2337,0.4498,0.6879),(0.5704,0.9786,1.0000),(0.3262,0.8001,0.9160),(0.4578,0.7458,1.0000)]^T$

$\widetilde{F}^2=[(0.3937,0.6614,0.8690),(0.3338,0.5678,0.7870),(0.4461,0.6747,0.9209),(0.4498,0.7344,0.9921),(0.6394,0.9122,1.0000)]^T$

$\widetilde{F}^3=[(0.4981,0.8275,0.9041),(0.3854,0.6391,0.8209),(0.4686,0.7399,0.8920),(0.2461,0.5088,0.7209),(0.5678,0.8689,1.0000)]^T$

$\widetilde{F}^0=[(0.3860,0.7311,0.8799),(0.3110,0.5475,0.7635),(0.4529,0.7411,0.9469),(0.3030,0.6316,0.8862),(0.5313,0.8367,1.0000)]^T$

步骤 3 根据公式(4)、(5)计算各专家的决策结果与群体决策结果的效用差异值 d^1=0.2598，d^2=0.1553，d^3=0.1741。归一化后的结果为：D^1=0.4409，D^2=0.2636，D^3=0.2955.

步骤 4 运用公式(6)、(7)、(8)对模糊效用函数值进行排序计算，得到各专家和群体决策结果中对这 m 个方案的排列顺序如下：

$F^1(t)$={3,5,4,1,2}, $F^2(t)$={5,4,3,1,2}, $F^3(t)$={5,1,3,2,4}, $F^0(t)$={ 5, 3, 1, 4, 2}

用公式（9）计算排序差值并归一化处理，得到标准差异值为：T^1=0.3833，T^2=0.2333，T^3=0.3833

步骤 5 根据公式(11)计算各专家与群体的相似度 S^k：S^1=0.7239，S^2=0.8526，S^3=0.7517；归一化得到各专家的客观权重 λ_2^1=0.3109, λ_2^2=0.3662, λ_2^3=0.3229；最后综合专家的主观权重，根据公式(10)计算得到各专家的综合权重 λ^1=0.3221, λ^2=0.3498, λ^3=0.3281.

步骤 6 将各个专家权重的综合权重代入重新计算，得到最终的群体决策结果如下：

$\widetilde{F}^Z=[(0.3871,0.7311,0.8804),(0.3127,0.5492,0.7641),(0.4512,0.7375,0.9457),(0.3059,0.6333,0.8888),(0.5338,0.838,1.0)]^T$

用 Lee-Li 的方法进行排序计算得到：

F(A1)=0.7815,F(A2)=0.7249,F(A3)=0.8051,F(A4)=0.7450,F(A5)=0.8470;F(A5)>F(A3)>F(A1)>F(A4)>F(A2)，所以最佳方案是 A5.

5 结论

在模糊多属性群决策下，本文提出了一种确定专家客观权重的新方法，给出了一个新的相似度的定义，它在综合考虑了个体与群体决策结果的顺序差异和数值差异的同时，也考虑了顺序差异的优先性，较[2-5]中只考虑数值差异的方法更加全面、科学。文中有关模糊数的计算可能不太精确，丢失了一部分信息，作者将在后期工作中继续研究，避免评价过程中造成的信息损失，从而增加评价的精确性。

References（参考文献）

[1] Liu Yezheng, Xu Depeng, Jiang yuancun. Method of adaptive adjustment weights in multi-attribute group decision-making[J]. Systems Engineering and Electronics,2007,29(1),P45-48.
刘业政,徐德鹏,姜元春.多属性群决策中权重自适应调整的方法.系统工程与电子技术,2007,29(1),P45-48.

[2] Song Guangxing, Zou Ping. Method of determining the weights of decision makers in multi-attribute group decision-making[J]. System Engineering,2001,19(4),P84-89.
宋光兴，邹平.多属性群决策中决策者权重的确定方法.系统工程，2001,19(4),P84-89.

[3] Wei Cunping, Qiu Wanhua, Wang Xinzhe. A new approach of group decision making under fuzzy preference[J]. System Engineering Theory & Practice,2001,21(7),P81-86.
魏存平,邱菀华,王新哲.一种新的模糊群体决策方法.系统工程理论与实践,2001,21(7),P81-86.

[4] Hsu HsiMei, Chen ChenTung. Aggregation of fuzzy opinions under group decision making[J]. Fuzzy sets and systems, 1996, 79, P279-285.

[5] A.İ. Ölçer, A.Y.Odabaşi. A new fuzzy multiple attributive group decision making methodology and its application to propulsion/maneuvering system selection problem[J]. European Journal of Operational Research, 2005,166,P93-114.
[6] Li Rongjun. Fuzzy multi-attribute decision making theory and application[M].Beijing: Science Press,2002.
李荣钧.模糊多准则决策理论与应用[M].北京:科学出版社,2002.
[7] KWONG C K, BAI H. A fuzzy AHP approach to the determination of importance weights of customer requirements in quality function deployment[J]. Journal of Intelligent Manufacturing, 2002, 13(5),P367-377.
[8] ZEKI A. A fuzzy AHP-based simulation approach to concept evaluation in a NPD environment[J]. IIE Transactions, 2005,37(9),P827-842.
[9] Chen Chen-Tung. Extension of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000,114,P1-9.

978-1-935068-15-0 © 2010 SciRes.