Modeling, Qualitative Analysis and Design of Networked Control system

MENG Jian-liang[1], YANG Yan-yan[1], YANG Chun-jiang[1], YANG Li[2]

[1] *North China Electric Power University, Baoding 071003, Hebei, China*

[2] *Yanshan University, Qinhuangdao066004, China*

xiaoyiyangyan2005@163.com

Abstract: In this paper, we explore the modeling, qualitative analysis and design of the Networked Control System. A novel model for Networked Control System is proposed under consideration of network-induced delay, data packet dropout, and disorder in the transmission. The model can be described as a discrete-time switched system. In terms of the given model, exponential stability condition of the closed-loop Networked Control System and a dynamic controller design method are derived based on the qualitative analysis approach for discrete-time switched systems. Those results have favorable expansibility to some of the existing references

Keywords: Networked control system, Discrete-time switched system, Average dwell time, Exponential stabilization

网络控制系统的建模、定性分析与设计

孟建良[1]，杨艳艳[1]，庞春江[1]，杨 丽[2]

[1]华北电力大学，保定，071003

[2]燕山大学，秦皇岛，066004

xiaoyiyangyan2005@163.com

【摘要】本文考虑了网络控制系统的建模，定性分析与设计问题。在考虑网络传输中同时存在网络诱导时延、数据包丢失和乱序的情况下，给出了网络控制系统的新模型。该模型由一个离散时间切换系统描述。基于给定的模型，应用离散时间切换系统的定性分析方法，得出了该闭环网络控制系统的指数稳定条件和动态控制器设计方法。由文中得出的推论即是一些现有文献的定理

【关键词】网络控制系统 离散时间切换系统 平均驻留时间 指数可稳定化

1 引言

近年来，实时分布控制过程（如电力，通讯，传输，自动化制造等）中广泛采用实时控制网络，从而网络控制系统应运而生。网络控制系统（NCSs）具有无可比拟的优点[1]，例如良好的系统可测性和高的资源利用率, 体积小、耗能低、布线要求简单等, 近年来引起了越来越广泛的关注。然而，由于有限的带宽及大量的数据包通过一条线路传输，易发生拥塞现象，从而导致数据包丢失，传输中的队列大小减少，或发送端传输速率降低。此外, 还会导致网络诱导时延和乱序的产生。在NCS中, 数据包丢失,网络诱导时延和乱序产生的影响是非常大的，有时甚至会引起实时控制系统的不稳定。

这些问题引起了许多学者的关注。文献[2]考虑时延小于一个采样周期的网络控制系统，设计了随机最优控制器，使该系统均方稳定。在文献[3]中，作者假设传输时延满足Markov特性，传感器和执行器采用时间驱动，控制器是事件驱动。然而，在这种模式下，在一个采样周期内到达的控制器信息仅仅有一个可被被控对象使用。在文献[4-6]中，作者为具有多阶时延的NCS提出了时分驱动执行器，该控制模式能够充分利用控制信息提高系统的性能。文献[7]为随机长时延NCS提出了有效的建模方法，执行器工作于事件—时间驱动方式，提高了系统性能。但是当考虑网络控制系统的丢包和乱序时，上述文献中的方法将会失效。文献[8，9]在同时考虑NCS时延、丢包、乱序的情况下，将NCS建模为带有界时变时延的时滞系统，设计了相应的静

978-1-935068-33-4 © 2010 SciRes.

态控制器，该方法具有较大的保守性，且对于离散的被控对象失效。据作者所知，到目前为止，还没有一篇文章对同时考虑时延、丢包、乱序的NCS建立符合网络时变特性的动态模型，进行相应的定性分析和控制器设计。

在本章中，首先将考虑网络传输中诱导时延、数据包丢失和乱序的NCS建模为一个离散时间线性切换系统。在这个模型中，控制器和执行器采用事件驱动方式，执行器和控制器信号能够及时被被控对象利用。进一步，在文献[10]的基础上，将离散时间切换系统的定性分析方法应用于新模型中，得出了NCS闭环系统的指数稳定条件和动态控制器设计方法。

1 NCS模型建立

本节着重介绍NCS模型的建立。考虑被控对象可以表示为如下线性时不变系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t)\\ u(t) &= Kx(t)\end{aligned} \tag{1}$$

其中，$x(t)\in R^n$ 为状态，$u(t)\in R^m$ 为控制输入，A和B是具有适当维数的系统矩阵。在采样时刻，以采样周期 h 将该系统离散化，得到：

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi x(k)+\Gamma u(k),\\ u(k) &= \Psi x(k),\end{aligned} \tag{2}$$

其中，$\Phi=e^{Ah}$, $\Gamma=\int_0^h e^{As}dsB$，$\Psi$ 是要确定的状态反馈增益。

接下来，将信号的传输过程描述如下：只要传感器信息到达控制器，控制器就对该信息作相应的计算，将相应的控制输出立即发送至执行器。假设在 $[kh,(k+1)h)$ 内，有 q^k 个数据包到达执行器，他们对应的网络诱导时延依次为 $\tau_{q^k}^k,\tau_{q^k-1}^k,\cdots,\tau_2^k$ 和 τ_1^k，所有时延的最大值和最小值分别为 $\tau_{\max}$ 和 $\tau_{\min}$，则被控对象为(1)的网络控制系统可建模为：

$$U(k)=\begin{bmatrix}u(k-d)\\ \vdots\\ u(k-1)\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi x(k)\\ &+\sum_{i=1}^{q_k}B^k_{\lfloor\tau_i^k/h\rfloor}u\left(k-\lfloor\tau_i^k/h\rfloor\right)+\delta B^k_{\lfloor\tau_1^{k-1}/h\rfloor}u\left(k-\lfloor\tau_1^{k-1}/h\rfloor\right)\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$\Phi=e^{Ah},\quad \delta\in\{0,1\},\quad \lfloor\tau_i^k/h\rfloor=\max\{n\in Z:n<\tau_i^k/h\},$$

$$B^k_{\lfloor\tau_1^k/h\rfloor}=\int_0^{T-\tau_1^k+\lfloor\tau_1^k/h\rfloor h}e^{A\left(T-s-\tau_1^k+\lfloor\tau_1^k/h\rfloor h\right)}dsB,\quad B^k_{\lfloor\tau_1^{k-1}/h\rfloor}=\int_0^{\tau_{q^k}^k-\lfloor\tau_{q^k}^k/h\rfloor h}e^{A(T-s)}dsB,$$

$$B^k_{\lfloor\tau_i^k/h\rfloor}=\int_0^{\tau_{i-1}^k-\tau_i^k-\left(\lfloor\tau_{i-1}^k/h\rfloor-\lfloor\tau_i^k/h\rfloor\right)h}e^{A\left(T-s-\tau_i^k+\lfloor\tau_i^k/h\rfloor h\right)}dsB,\quad i=1,2,3,\cdots,q^k, \tag{4}$$

注1 在式(3)中，如果 $\delta=0$，则等价时延为 $\tau_{q_k}^k$ 的数据包在采样时刻 kh 到达执行器。否则，如果 $\delta=1$，该数据包在时刻 kh 之后到达。τ_1^{k-1} 表示在时间段 $[(k-1)h,kh)$ 内，最后到达的数据包的网络诱导时延。

注 2 在式(3)中，$\lfloor\tau_i^k/h\rfloor$ 是集合 $\{\lfloor\tau_{\min}/h\rfloor,\lfloor\tau_{\min}/h\rfloor+1,\cdots,\lfloor\tau_{\max}/h\rfloor\}$ 的一个子集,如果 $\lfloor\tau_{i-1}^k/h\rfloor+1=\lfloor\tau_i^k/h\rfloor$，则在传输过程中没有发生数据包丢失。当 $\lfloor\tau_{i-1}^k/h\rfloor+1<\lfloor\tau_i^k/h\rfloor$ 时，数据包 $x\left(k-\lfloor\tau_i^k/h\rfloor+1\right),x\left(k-\lfloor\tau_i^k/h\rfloor+2\right),\cdots,x\left(k-\lfloor\tau_i^k/h\rfloor-1\right)$ 可能丢失或者出现时序错乱的现象。如果 $\lfloor\tau_{i-1}^k/h\rfloor>\lfloor\tau_i^k/h\rfloor$，则新的数据信息先于旧数据到达被控对象。因此，式(3)表示NCS的一般模型，该模型同时考虑了网络传输中的网络诱导时延、数据包丢失和乱序因素的影响。

为将系统(3)表示为标准的状态空间的形式，建立具有如下形式的控制采样：

(5)

其中 $$d=\lfloor\tau_{\max}/h\rfloor \tag{6}$$

包含在 $U(k)$ 中的控制信号取决于在一个采样周期内到达执行器的数据包的数目以及这些数据包遭受的网络诱导时延的大小。从式(6)中可以看出通过给定 $\tau_{\max}$ 可以固定 $U(k)$ 的维数。

接下来，将网络控制系统(3)改写为一个离散时间线性切换系统。假设对于切换信号 $\sigma(k)$ 存在一个状态反馈控制律 $\Psi_{\sigma(k)}$，则控制器 $u(k)$ 可以表示为：

$$u(k)=\Psi_{\sigma(k)}x(k) \tag{7}$$

其中，$\Psi_{\sigma(k)}$ 是由切换信号 $\sigma(k)$ 标注的一个恒定矩阵，$\sigma(k)$ 是一个分段常值函数，且满足 $\sigma(k):Z^+\to\Omega\in\{1,2,3,\cdots,Q\}$，$Q$ 为时间间隔 $[0,k)$ 内 $\sigma(k)$ 总的取值个数。通过式(3)、(5)和(7)可将闭环网络控制系统表示为如下离散时间切换线性系统：

$$z(k+1)=A_{\sigma(k)}z(k). \tag{8}$$

其中，

$$z(k)=\left[x^T(k)\ U^T(k)\right]^T,$$

$$A_{\sigma(k)}=\begin{bmatrix}\Phi+B_0^{\sigma(k)}\Psi_{\sigma(k)} & B_d^{\sigma(k)} & B_{d-1}^{\sigma(k)} & \cdots & B_1^{\sigma(k)}\\ 0 & 0 & I_m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_m\\ \Psi_{\sigma(k)} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \tag{9}$$

注3 假设对于网络控制系统(3)，最大包丢失数目为v，且$v<d$。当且仅当发生包丢失时，等式(9)中的$B_i^{\sigma(k)}$除了在第$\sigma(k)$列为B，其余均为零。当且仅当产生网络诱导时延时，有几个连续的$B_i^{\sigma(k)}$取得等式(4)中的值，其余均为零。

2 平均驻留时间下NCS的指数可稳定化

2.1 稳定性分析

在本小节中，以文献[10]为基础，推导出网络控制系统(8)全局指数稳定的定理。首先给出式(8)为指数稳定的定义：

定义1[10] 如果对于所有的$k\ge 0$，存在恒值c，使得$\|x(k)\|\le c\lambda^k\|x_0\|$成立，其中$\lambda<1$，则系统(3-7)是全局指数稳定的，其稳定裕度为$\lambda$。

定义2[10] 对于任意的切换信号$\sigma(k)$和任意的$k\ge 1$，如果$N_\sigma(0,k)$表示在时间间隔$[0,k)$内$\sigma(k)$总的切换次数，给定$N_0\ge 0$和$t_a>0$，对于切换信号$\sigma(k)$满足

$$N_{\sigma(k)}(0,k)\le N_0+k/t_a, \tag{10}$$

则称t_a为平均驻留时间。

为了标记简单，定义$A_{\sigma(k)},\lambda_{\sigma(k)},l_{\sigma(k)},P_{\sigma(k)}$ $\Psi_{\sigma(k)}$分别为$A_\sigma,\lambda_\sigma,l_\sigma,P_\sigma,\Psi_\sigma$。

定理1 对于任意给定的$\lambda\in(\lambda_{stable},1)$，如果存在一个有限常值$t_a^*$和$\lambda^*\in(\lambda_{stable},\lambda)$使得$K_1(0,k),K_2(0,k),\cdots,K_{Q-1}(0,k),K_Q(0,k)$和$N_\sigma(0,k)$，满足如下两个条件：

(1) $\inf_{k>0} K_1(0,k)\ln\lambda_1+K_2(0,k)\ln\lambda_2+\cdots+K_{Q-1}(0,k)\ln\lambda_{Q-1}+K_Q(0,k)\ln\lambda_Q\le k\ln\lambda^*$；

(2)平均驻留时间不小于t_a^*，即

$$N_\sigma(0,k)\le N_0+k/t_a^*,\quad t_a^*=\ln l/(\ln\lambda-\ln\lambda^*),$$

N_0为任意给定值。

则网络控制系统(8)是全局指数稳定的，且稳定裕度为λ。

证明：给定网络控制系统(8)，总是存在正的标量λ_σ和l_σ，对于任意$k\ge 1$满足：

$$\|A_\sigma^k\|\le l_\sigma\lambda_\sigma^k, \tag{11}$$

其中，对于Schur稳定系统，$\lambda_\sigma<1$；对于Schur不稳定系统，$\lambda_\sigma\ge 1$。令$k_1<k_2<\cdots<k_s$ $(s\ge 1)$表示在时间间隔$[0,k)$内σ的切换点。A_{r_j}在时间段$[k_j,k_{j+1})$起作用，$K_j(0,k)$表示系统A_{r_j}在$[0,k)$起作用的总时间。显然$\sum_{j=1}^{Q}K_j(0,k)=k$。进而，通过迭代的方法可以得到

$$x[k]=A_{r_s}^{k-k_s}A_{r_{s-1}}^{k_s-k_{s-1}}\cdots A_{r_1}^{k_2-k_1}A_{r_0}^{k_1}x(0)$$

通过(11)式，计算得出

$$\begin{aligned}\|x(k)\|&\le\|A_{r_s}^{k-k_s}\|\|A_{r_{s-1}}^{k_s-k_{s-1}}\|\cdots\|A_{r_1}^{k_2-k_1}\|\|A_{r_0}^{k_1-k_0}\|\|x(0)\|\\&\le cl^{N_\sigma(0,k)}\lambda_1^{K_1(0,k)}\lambda_2^{K_2(0,k)}\\&\cdots\lambda_{Q-1}^{K_{Q-1}(0,k)}\lambda_Q^{K_Q(0,k)}\|x(0)\|\end{aligned} \tag{12}$$

其中，$l=\max_{1\le j\le Q}l_j$，$c=l$，$N_\sigma(0,k)$表示在时间间隔$[0,k)$内σ总的切换次数。定义$\lambda_\sigma\in\Delta=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_{Q-1},\lambda_Q\}$，对于$\lambda_{stable}:=\max\{\lambda_\sigma\in\Delta:\lambda_\sigma<1\}$，存在$\lambda^*\in(\lambda_{stable},1)$使得下式成立

$$\|x(k)\|\le cl^{N_\sigma(0,k)}(\lambda^*)^k\|x(0)\| \tag{13}$$

当$l\le 1$时，式(13)可以表示为$\|x(k)\|\le c(\lambda^*)^k\|x(0)\|$，这表明NCS(8)是全局指数稳定的，且具有稳定裕度λ^*和任意的平均驻留时间；当$l>1$时，本节应用任意的正标量l_0设置$l^{N_\sigma(0,k)}(\lambda^*)^k\le l_0(\lambda)^k$。该不等式等价于

$$\begin{aligned}&N_\sigma(0,k)\le N_0+k/t_a^*,\\&N_0=\ln l_0/\ln l,\quad t_a^*=\ln l/(\ln\lambda-\ln\lambda^*)\end{aligned} \tag{14}$$

式(13)可以表示为：

$$\|x(k)\|\le cl_0(\lambda)^k\|x(0)\|$$

则NCS(8)是全局指数稳定的，且具有式(14)描述的稳定裕度λ^*和任意的平均驻留时间t_a^*。证毕。

尽管定理1没有考虑Schur稳定和Schur不稳定子系统总作用时间的比例关系，但是可以注意到这是它的特殊情况，可以作为一个推论。假设，$F\in\omega$表示Schur不稳定子系统的集合，$\bar{F}\in\bar{\omega}$表示Schur稳定子系统的集合，$K^-(0,k)$和$K^+(0,k)$分别表示Schur稳定和不稳定子系统的总的作用时间，因为

$$\begin{aligned}&K_1(0,k)\ln\lambda_1+K_2(0,k)\ln\lambda_2\\&+\cdots+K_{Q-1}(0,k)\ln\lambda_{Q-1}+K_Q(0,k)\ln\lambda_Q\\&\le K^-(0,k)\ln\hat{\lambda}_1+K^+(0,k)\ln\hat{\lambda}_2\\&\le k\ln\lambda^*=K^-(0,k)\ln\lambda^*+K^+(0,k)\ln\lambda^*,\end{aligned}$$

978-1-935068-33-4 © 2010 SciRes.

则有

$$F \cup \bar{F} = \Omega,$$
$$\sum_{j\in F} K_j(0,k) = K^+(0,k), \quad K^-(0,k) = k - K^+(0,k),$$
$$\hat{\lambda}_2 = \max \lambda_j,\ j \in F, \qquad \hat{\lambda}_1 = \max \lambda_i,\ i \in \bar{F}. \tag{15}$$

因此，得到如下推论：

推论1 对于任意给定的 $\lambda \in \left(\hat{\lambda}_1, 1\right)$，如果存在有限常值 t_a^* 和 $\lambda^* \in \left(\hat{\lambda}_1, \lambda\right)$ 使得 $K^+(0,k)$ 和 $N_\sigma(0,k)$ 满足以下两个条件：

(1) $\inf_{k>0} K^-(0,k)/K^+(0,k) \ge \left(\ln\hat{\lambda}_2 - \ln\lambda^*\right)/\left(\ln\lambda^* - \ln\hat{\lambda}_1\right)$ 对于标量 $\lambda^* \in \left(\hat{\lambda}_1, \lambda\right)$ 成立；

(2) 平均驻留时间不小于 t_a^*，即对于任意给定的 N_0 满 $N_\sigma(0,k) \le N_0 + k/t_a^*$，$t_a^* = \ln l/(\ln\lambda - \ln\lambda^*)$；

则网络控制系统(8)是全局指数渐进稳定的，其稳定程度为 λ。

该推论是文献[11]的定理1，作为本章定理的一个特殊情况。

2.2 控制器设计

接下来，基于分段Lyapunov函数方法和平均驻留时间机制，给出NCS(8)的控制器设计方法。

定理2 如果对于 $\sigma \in \Omega$ 和任意给定的 $\lambda \in \left(1, \left(\lambda^*\right)^{-1}\right)$，存在正常数 β_σ，正定矩阵

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} P_{1\sigma} & 0 & \cdots & 0 \\ * & P_{2\sigma} & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & P_{(d+1)\sigma} \end{bmatrix},$$

矩阵 Ψ_σ，有限常值 t_a^* 和 $\lambda^* \in \left(\lambda_{stable}, 1\right)$ 使得如下三个条件成立

(1) 线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}
-\lambda_\sigma^2 P_{1\sigma} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \Phi^T + \Psi_\rho^T\left(B_0^{\rho(k)}\right)^T & 0 & \cdots & 0 & \Psi_\rho^T \\
* & -\lambda_\sigma^2 P_{2\sigma} & 0 & \cdots & 0 & \left(B_d^\rho\right)^T & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
* & * & -\lambda_\sigma^2 P_{3\sigma} & \cdots & 0 & \left(B_{d-1}^\rho\right)^T & I_m & \cdots & 0 & 0 \\
* & * & * & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & -\lambda_\sigma^2 P_{(d+1)\sigma} & \left(B_1^\rho\right)^T & 0 & \cdots & I_m & 0 \\
* & * & * & * & * & -P_{1\rho}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -P_{2\rho}^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \ddots & \vdots & \vdots \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -P_{d\rho}^{-1} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -P_{(d+1)\rho}^{-1}
\end{bmatrix} < 0; \tag{16}$$

(2) $K_1(0,k), K_2(0,k), \cdots, K_{Q-1}(0,k), K_Q(0,k)$ 和 $N_\sigma(0,k)$ 满足

$$\inf_{k>0} K_1(0,k)\ln\lambda_1 + K_2(0,k)\ln\lambda_2 + \cdots + K_{Q-1}(0,k)\ln\lambda_{Q-1} + K_Q(0,k)\ln\lambda_Q \le k\ln\lambda^*;$$

(3)平均驻留时间不小于 $t_a^* = \ln\mu/(2\ln\lambda)$，则网络控制系统(8)是全局指数稳定的，且稳定裕度为 $\lambda\lambda^*$。

证明：为网络控制系统(8)选择如下分段Lyapunov函数

$$V(k) = V_\sigma(z(k)) = z^T(k) P_\sigma z(k)$$

由文献[10]可知，总是存在恒定标量

$$\alpha_1 = \min_{\forall\sigma\in\Omega} \lambda_{\min}(P_\sigma) > 0,\quad \alpha_2 = \max_{\forall\sigma\in\Omega} \lambda_{\max}(P_\sigma) > 0,$$

使得

$$\alpha_1 \|z\|^2 \le V_\sigma(z) \le \alpha_2 \|z\|^2 \qquad \forall z \in R^{n+md},\quad \forall\sigma\in\Omega. \tag{17}$$

且存在恒定的标量 $\mu \ge 1$，使得

$$V_\sigma(z) \le \mu V_\rho(z) \qquad \forall z \in R^{n+md},\quad \forall\sigma,\rho\in\Omega. \tag{18}$$

其中，$\mu = \sup_{\forall\sigma,\rho\in\Omega}\left(\lambda_{\max}(P_\sigma)/\lambda_{\min}(P_\rho)\right)$。由Schur补引理2-1和式(16)可得：

$$V(k+1) - V(k) \le -\left(1-\lambda_\sigma^2\right)V(k) \tag{19}$$

其中，对于Schur稳定的系统 $\lambda_\sigma < 1$，对于Schur不稳定的系统 $\lambda_\sigma \ge 1$。类似的，令 $k_1 < k_2 < \cdots < k_s\ (s \ge 1)$ 表示 σ 在时间间隔 $[0,k)$ 的切换点，得到

$$V(k) \le \lambda_\sigma^{2(k-k_s)} V(k_s). \tag{20}$$

因为 $V_\sigma(k_s) \le \mu V_\sigma(k_s^-)$ 对于所有的 k_s 成立，所以有

$$V(k) \le \mu^{N_\sigma(0,k)} \lambda_1^{2K_1(0,k)} \lambda_2^{2K_2(0,k)} \cdots \lambda_{Q-1}^{2K_{Q-1}(0,k)} \lambda_Q^{2K_Q(0,k)} V(z(0)) \tag{21}$$

定义 $\lambda_\sigma \in \Psi = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{Q-1}, \lambda_Q\}$，则必定存在 $\lambda^* \in (\lambda_{stable}, 1)$ 使得下式成立

$$V(k) \le \mu^{N_\sigma(0,k)} \left(\lambda^*\right)^{2k} V(z(0)) \tag{22}$$

其中 $\lambda_{stable} := \max\{\lambda_\sigma \in \Psi : \lambda_\sigma < 1\}$。

进一步，对于任意正整数 $k > 0$，考虑以下的平均驻留时

间条件

$$N_\sigma(0,k) \le k/t_a^*, \qquad t_a^* = \ln\mu/(2\ln\lambda) \tag{23}$$

将(23)式应用到不等式(22)中得到

$$V(k) \le (\lambda\lambda^*)^{2k} V(z(0)) \tag{24}$$

联合(17)-(24)式，有

$$\|z(k)\|^2 \le V(k)/\alpha_1, V(z(0)) \le \alpha_2 \|z(0)\|^2, \tag{25}$$

因此

$$\|z(k)\|^2 \le (\lambda\lambda^*)^{2k} V(z(0))/\alpha_1 \le \alpha_2 (\lambda\lambda^*)^{2k}/\alpha_1 \|z(0)\| \tag{26}$$

即

$$\|z(k)\| \le \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}(\lambda\lambda^*)^k \|z(0)\|$$

这表明NCS(8)是全局指数稳定的，其稳定裕度 $\lambda\lambda^*$ 和平均驻留时间 t_a^* 满足式(23)。定理得证。

2.3 包丢失数目取值分析

此外，当仅发生包丢失时，在整个时间间隔 $[0,k)$ 内，最大包丢失事件率则为 $v/(v+2)$。本节将进一步给出定理2的推论和最大包丢失数目 v 的取值范围。

推论2 系统仅存在包丢失时，如果线性矩阵不等式(16)成立，对于任意给定的 $\tilde{\lambda} \in \left(1,(\tilde{\lambda}_1)^{-1}\right)$，存在 $\tilde{\lambda}_1 < 1$ 和平均驻留时间 $t_a^* \ge \ln\mu/(2\ln\lambda)$ 使得数据包丢失的数目满足：

$$v < -2(\ln\tilde{\lambda} + \ln\tilde{\lambda}_1)/(\ln\tilde{\lambda} + \ln\tilde{\lambda}_2) \tag{27}$$

则NCS(8)是全局指数稳定的，其稳定裕度为 $\lambda\lambda^*$，控制器增益为 Ψ_ρ，其中

$$\lambda^* = \tilde{\lambda}_1^{2/(v+2)}\tilde{\lambda}_2^{2/(v+2)}$$

证明： 假设 $\Lambda \in \tilde{\Omega}$ 表示具有数据包丢失的子系统的集合；$\bar{\Lambda} \in \tilde{\Omega}$ 表示不发生包丢失的子系统的集合。$\tilde{K}^+(0,k)$ 和 $\tilde{K}^-(0,k)$ 分别表示在时间间隔 $[0,k)$ 内，有包丢失子系统和无包丢失子系统各自总的作用时间。则有

$$\begin{aligned}
&\Lambda \cup \bar{\Lambda} = \tilde{\Omega}, \quad \sum_{j\in\Lambda} K_j(0,k) = \tilde{K}^+(0,k),\\
&\tilde{K}(0,k) = k - \tilde{K}^+(0,k), \quad \tilde{\lambda}_2 = \max\lambda_j, \quad j \in \Lambda,\\
&\tilde{\lambda}_1 = \max\lambda_i, \quad i \in \bar{\Lambda}
\end{aligned} \tag{28}$$

同样地，

$$\begin{aligned}
&K_1(0,k)\ln\lambda_1 + K_2(0,k)\ln\lambda_2 + \cdots + K_{Q-1}(0,k)\ln\lambda_{Q-1} + K_Q(0,k)\ln\lambda_Q\\
&\le \tilde{K}^-(0,k)\ln\tilde{\lambda}_1 + \tilde{K}^+(0,k)\ln\tilde{\lambda}_2
\end{aligned}$$

根据文献[11]有

$$\tilde{K}^+(0,k) \le (vk)/(v+2) + T_t \tag{29}$$

$$\tilde{K}^-(0,k) \ge (1-(vk)/(v+2))k - T_t \tag{30}$$

进一步，由式(21)-(23)得

$$\begin{aligned}
V(k) &\le \mu^{N_\sigma(0,k)}\lambda_1^{2k_1(0,k)}\lambda_2^{2k_2(0,k)}\cdots\lambda_{Q-1}^{2k_{Q-1}(0,k)}\lambda_Q^{2k_Q(0,k)}V(Z(0))\\
&\le \lambda^{2k}\tilde{\lambda}_1^{2[(1-v/(v+2))k-T_t]}\tilde{\lambda}_2^{2[vk/(v+2)+T_t]}V(Z(0))
\end{aligned} \tag{31}$$

由式(25)，(26)得

$$\begin{aligned}
\|Z(k)\| &\le \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}\lambda^k\tilde{\lambda}_1^{[(1-v/(v+2))k-T_t]}\tilde{\lambda}_2^{[vk/(v+2)+T_t]}\|Z(0)\|\\
&\le \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}\tilde{\lambda}_1^{-T_t}\tilde{\lambda}_2^{T_t}\left(\lambda\tilde{\lambda}_1^{2/(v+2)}\tilde{\lambda}_2^{v/(v+2)}\right)^k\|Z(0)\|\\
&= \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}\tilde{\lambda}_1^{-T_t}\tilde{\lambda}_2^{T_t}(\lambda\lambda^*)^k\|Z(0)\|
\end{aligned} \tag{32}$$

从式(27)可以得出 $\lambda\tilde{\lambda}_1^{2/(v+2)}\tilde{\lambda}_2^{v/(v+2)} < 1$。这表明仅考虑数据包丢失的NCS(8)是全局指数稳定的，最大包丢失数目为 $\lfloor -2(\ln\tilde{\lambda} + \ln\tilde{\lambda}_1)/(\ln\tilde{\lambda} + \ln\tilde{\lambda}_2)\rfloor$，且具有式(23)给出的稳定裕度 $\lambda\lambda^*$ 和平均驻留时间 t_a^*。其中，$\lfloor * \rfloor$ 表示小于 $\lfloor * \rfloor$ 的最大正数。

3 数值仿真

为了说明本章方法的有效性,考虑如下数值算例。选择初始条件为 $[0.01;0.03]$ 的被控对象模型

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1.37 & -0.0129 \\ -34.51 & -0.41 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -10.88 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t) \tag{33}$$

采样周期为0.01s，$\lambda_1 = \lambda_{stable} = 0.844$，$\lambda_2 = 1.5111$，$\lambda = 0.992$，$\lambda^* = 0.9879$，$K_1(0,k) = 12s$，$K_2(0,k) = 38s$，根据定理3-2，得到状态 x_1 和 x_2 的状态轨迹如图1所示。从图中可以看出，利用设计的反馈控制器，系统状态收敛于零，说明本方法的有效性。根据推论2，选择 $\tilde{\lambda} = 1.1321$，$\tilde{\lambda}_1 = 0.844$，$\tilde{\lambda}_2 = 1.5111$，可得最大包丢失数目 $v < 1.4526$。

978-1-935068-33-4 © 2010 SciRes.

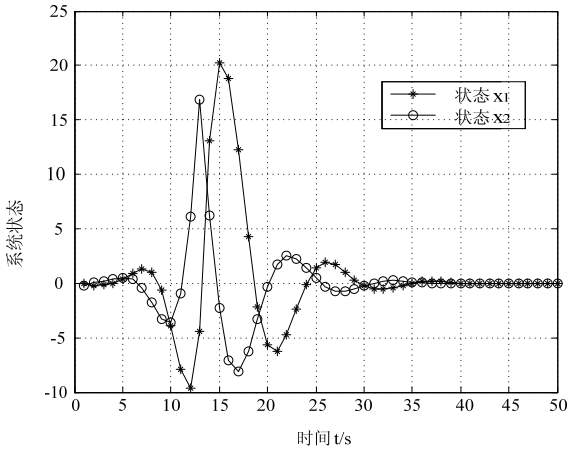

图1. 网络控制系统的状态响应

Figure 1. State trajectories of networked motor control system

4 本章小结

本章针对网络控制系统数据传输中存在的长时延、包丢失和时序混乱问题提出了一种新的网络模型。在此模型中，网络控制系统由从传感器到控制器和由控制器到执行器两条通道进行描述，传感器选择为时间驱动，控制器和执行器是事件驱动，使得到达控制器节点的信息能够得到充分利用。为了避免设计控制器时困难，运用了离散时间跳变系统理论和线性矩阵不等式的分析方法，保证了闭环控制系统的稳定性。

References (参考文献)

[1] G. C.Walsh, H. Ye, Scheduling of networked control systems. IEEE Control Systems Magazine, 21(1), 2001, pp. 57-65.

[2] C. Q.Wu, A. H. Li, Z. R. Zhang, Analysis and Modeling of MIMO Networked Control Systems, in: Proceedings of the Chinese Control Conference, Hunan, China, 2007, pp. 235-238.

[3] Z. X. Yu, H. T. Chen, Y. J. Wang. Research on control network system with Markov delay characteristic. In: Proceedings of the 3rd world congress on intelligent control and automation, Hefei, PR China, June 2000. pp.36-40.

[4] C. L. Ma, H. J., Fang, Research on mean square exponential stability of networked control systems with multi-step delay, Applied Mathematical Modeling, 30, 2006, pp. 941-950.

[5] C. L. Ma, H. J., Fang, Research on stochastic control of networked control systems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2007, doi:10.1016/j. cnsns.2007.02.0108.

[6] Zhou Zude,Chen Benyuan,Liu Quan,Long Yihong. The research on delay distribution of network control system, Control and decision, 4,2010.
周祖德,陈本源,刘泉,龙毅宏. 网络控制系统时延分布研究, 控制与决策, 4,2010.

[7] Y. Yang, Y. J.Wang, Modeling and control for NCS with time-varying long delays, in: Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Guangzhou, 2005, pp. 1407-1411.

[8] D. Yue, Q. L. Han, P. Chen, State feedback controller design of networked control systems, IEEE Trans. Circuits Syst. II: Exp. Briefs, 51(11), 2004, pp. 640-644.

[9] Peng Chen, Tian Engang, An improved network control system analysis and synthesis method with non-ideal network conditions, Automation Technology, 36(1), pp. 188-192.
彭晨,田恩刚,一种改进的具有非理想网络状况的网络控制系统分析与综合方法,自动化学报,36(1), pp. 188-192.

[10] G. S. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, A. N. Michel, Qualitative analysis of discrete-time switched systems, in: Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, AK, 2002, pp. 1880-1885.

[11] H. Lin, G. S. Zhai, P. J. Antsaklis, Robust stability and disturbance attenuation analysis of a class of Networked control systems, in: Proceedings of Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii USA, 2003, pp. 1882-1887.