

Research on Modeling of PWM Drive Motor System

SUN Yaxiu, CHEN Bingcai, GUO Lili

Information and Communication Engineering College, Harbin Engineering University, Harbin, China

e-mail: sunyaxiu@hrbeu.edu.cn, chenbingcai@hrbeu.edu.cn, guolili@hrbeu.edu.cn

Abstract: The rectifier and inverter in three phase PWM drive motor system is studied in this paper. Based on Fourier Transform and Double Fourier integral, Mathematical models on common mode and differential mode noise source of rectifier and inverter are separately built PWM carrier wave and fundamental wave function are described by two independence periodic time function and the action function by two variable combined is used to integrand of Double Fourier integral. The inner and outer integral limits with sine pulse width modulation are obtained. The simulation and experiment results demonstrate that mathematical model of noise source is valid, which lays a foundation for interference forecast of system.

Keywords: PWM drive; common mode noise source; difference mode noise source; fourier transform; double fourier integral

PWM 驱动电机系统干扰源的模型研究

孙亚秀, 陈炳才, 郭黎利

哈尔滨工程大学, 信息与通信工程学院, 哈尔滨, 中国, 150000

e-mail: sunyaxiu@hrbeu.edu.cn, chenbingcai@hrbeu.edu.cn, guolili@hrbeu.edu.cn

【摘 要】本文以三相PWM驱动电机系统中的整流桥和逆变器为研究对象, 分别采用傅立叶变换法和双重傅立叶积分法建立整流桥和逆变桥产生的共模和差模干扰源的数学模型。在建立逆变桥干扰源的数学模型时, 把PWM载波和基波用两个独立周期的时变函数描述, 并将其共同作用的函数作为被积函数, 文中详细推导了正弦脉宽调制技术的内外积分线的确定过程, 最后通过实验结果和仿真结果的比较, 验证了所建立干扰源模型的正确性, 为以后该系统的干扰预测奠定基础。

【关键词】 PWM 驱动; 共模干扰源; 差模干扰源; 傅立叶变换; 双重傅立叶积分

1 引言

随着开关管开关频率的不断提高, PWM 驱动的电机系统的传导干扰也日趋严重, 众所周知, 电磁干扰的形成必须具备三要素: 干扰源、耦合途径及接收器。为了能有效抑制 PWM 驱动的电机系统产生的传导干扰并使其达到国家电磁兼容标准, 必须对系统的电磁干扰源进行深入的研究。

国内外很多学者都开展了对PWM驱动的电机系统的传导干扰的研究^[1-4], 但多数文献都是集中于对系统电路参数的抽取和负载侧电机模型的建立^[5], 以及PWM共模电压引起的轴电流、轴电压和共模漏电流等负面效应的影响^[6,7], 也有一些文章专门讨论长线缆对电机性能的影响^[8], 而对PWM驱动的电机系统的干扰源模型的深入研究文献不多, 而仅有的几篇文献的研究也都过于简单, 缺乏对PWM电机系统整流桥产生的干扰源的描述及逆变器产生的干扰源的

精确的数学分析及模型的建立^[9]。

基于此, 本文重点研究PWM驱动电机系统的干扰源。文中首先分析三相整流桥的共模和差模干扰机理, 并通过傅立叶变换推导出共模和差模干扰源的表达式, 然后分析逆变桥的共模和差模干扰机理, 由于逆变桥采用的是PWM控制, 因此无法用简单的傅立叶变换得到干扰源的数学描述, 文中采用Bennett和Black在通信系统中创立的双重傅立叶积分法来建立三相PWM变换器的共模和差模干扰源的数学表达式。最后通过仿真和计算结果验证所建立的干扰源模型的正确性和有效性。

2 整流桥产生的干扰源分析

在电力电子系统中, 整流桥是最常用的设备, 但由于其工作频率较低, 故引起的传导干扰较小, 导致其研究较为困难, 然而在一些独立供电系统中, 整流桥的传导干扰也会引起电磁兼容问题, 本节的研究对

象如图 1 所示，图中同时画出了整流桥输出侧的共模和差模电流方向，其中 C_p 代表系统对地的寄生电容，为共模电流提供通路。

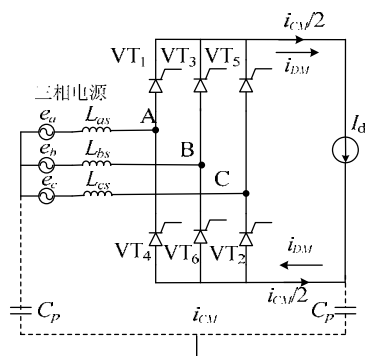
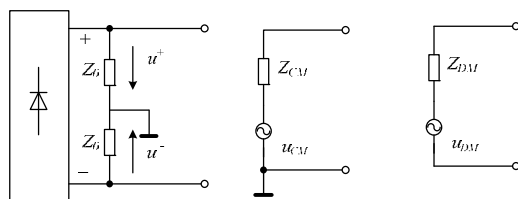


Figure 1. Circuit of commutating bridge
图 1 整流桥电路

图 2 为整流桥侧接入 LISN 后的共模和差模等效电路图。整流桥输出侧的共模和差模的定义式如下：

$$u_{CM} = \frac{u^+ + u^-}{2} \quad (1)$$

$$u_{DM} = u^+ - u^- \quad (2)$$



a) 共模和差模定义, b) 共模等效电路, c) 差模等效电路

Figure 2. CM and DM equivalent circuit of commutating bridge connected to LISN

图 2. 整流桥接入 LISN 后的共模和差模等效电路图

为了保持线路对地阻抗的稳定性，并要保证计算结果能够与国家规定的标准相比较，所以按照标准 GJB152A-97 的要求在整流桥输出侧接入 LISN。图 3 为 LISN 的电路原理图。

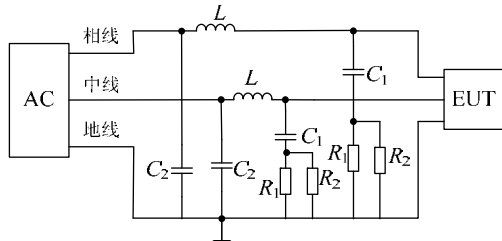


Figure 3. Sketch of LISN

图 3. 线路阻抗稳定网络原理图

根据整流桥晶闸管不同时刻的开关导通情况可以先得到 u^+ 和 u^- 的傅立叶级数展开式如下：

$$u^+ = \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} U_{ab} \left[1 - \frac{1}{4} \sin(3\omega t) + \frac{2}{35} \sin(6\omega t) - \frac{1}{40} \sin(9\omega t) + \dots \right] \quad (3)$$

$$u^- = \frac{-3\sqrt{2}}{2\pi} U_{ab} \left[1 - \frac{1}{4} \sin 3(\omega t + \frac{\pi}{3}) + \frac{2}{35} \sin 6(\omega t + \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{40} \sin 9(\omega t + \frac{\pi}{3}) + \dots \right] \quad (4)$$

根据公式(1)(2)(3)(4)可得出整流桥侧共模和差模电压源的数学模型：

$$u_{SCM1} = -\frac{3\sqrt{2}}{8\pi} U_{ab} \sin(3\omega t) - \frac{3\sqrt{2}}{80\pi} U_{ab} \sin(9\omega t) - \dots \quad (5)$$

$$u_{SDM1} = \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} U_{ab} \left[2 + \frac{4}{35} \cos 6\omega t - \frac{4}{143} \cos 12\omega t + \frac{4}{323} \cos 18\omega t - \dots \right] \quad (6)$$

3 逆变桥产生的干扰源分析

图 4 给出了三相逆变桥拓扑，图中标出了逆变桥输出的共模和差模电流路径。在 PWM 逆变器中，共模电压定义为逆变桥输出中点对参考点的电位差，该文中的参考点取为直流母线中点 M。而输出的差模电压应为输出侧的线电压，利于基尔霍夫电压定律可推导出共模和差模电压的表达式：

$$u_{CM} = \frac{u_{UM} + u_{VM} + u_{WM}}{3} \quad (7)$$

$$u_{DM} = u_{UM} - u_{VM} \quad (8)$$

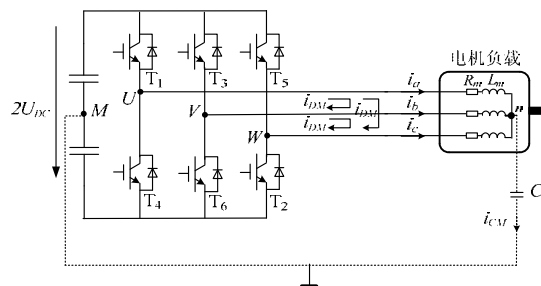


Figure 4. Circuit topology of three phase converter
图 4. 三相逆变桥电路拓扑

逆变桥输出侧的共模和差模电压值随着功率管开关状态的变化而改变，而此处的共模和差模电压的大小是由两个函数即载波和调制波共同作用得到的，要想将其作用后得到的共模和差模电压表示成数学模型，需引入双重傅立叶积分法。

3.1 双重傅立叶积分方法

双重傅立叶积分的基本原理是假设有两个独立周期性的时变函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ ，且

$$x(t) = \cos(\omega_c t + \theta_c) \quad (9)$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \omega_0 t - 1 & \omega_0 t = 0 \sim \pi \\ -\frac{2}{\pi} \omega_0 t + 3 & \omega_0 t = \pi \sim 2\pi \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\omega_c = 2\pi f_c$ ， $\omega_0 = 2\pi f_0$ ，且 $\omega_0 < \omega_c$ 。

式中 ω_c 载波角频率；

f_c 载波频率；

θ_c 载波的初始角度；

ω_0 调制波角频率；

f_0 调制波频率；

若认为两个时变分量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是独立周期性的，则对于由这两个变量共同作用的函数 $f(x, y)$ ，其谐波分量可以表达为

$$f(x, y) = \frac{A_{00}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} \sin(\omega_{0n} t + \varphi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0} \sin(\omega_{cm} t + \varphi_m) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin[(\omega_{cm} + \omega_{0n})t + \varphi_{mn}] \quad (11)$$

式中 $\omega_{0n} = n\omega_0$ 表示调制波的第 n 次谐波， $\omega_{cm} = m\omega_c$ 表示载波的第 m 次谐波，式(11)各项含义如下： A_{00} 表示直流分量的幅值， A_{0n} 和 φ_n 分别表示调制波的谐波分量的幅值和相角， A_{m0} 和 φ_m 分别表示载波谐波分量的幅值和相角， A_{mn} 和 φ_{mn} 分别表示载波边带谐波的幅值和相角。上面推导过程均设 $\theta_c = 0, \theta_0 = 0$ 。将式(10)写成傅立叶级数的形式如下式：

$$f(x, y) = \frac{a_{00}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{0n} \cos \omega_{0n} t + b_{0n} \sin \omega_{0n} t] + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{m0} \cos \omega_{cm} t + b_{m0} \sin \omega_{cm} t] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn} \cos(\omega_{cm} t + \omega_{0n} t) + b_{mn} \sin(\omega_{cm} t + \omega_{0n} t)] \quad (12)$$

上述式子中 a_{mn} 和 b_{mn} 的计算公式如下：

$$a_{mn} = \frac{1}{T_x T_y} \int_{-\frac{T_y}{2}}^{\frac{T_y}{2}} \int_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} f(x, y) \cos(mx + ny) dx dy \quad (13)$$

$$b_{mn} = \frac{1}{T_x T_y} \int_{-\frac{T_y}{2}}^{\frac{T_y}{2}} \int_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} f(x, y) \sin(mx + ny) dx dy \quad (14)$$

式中 T_x 和 T_y 分别为函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的周期。为了应用上的方便，可以利用欧拉公式把双重傅立叶级数的三角形式转换为复指数形式：

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{j(\omega_{cm} t + \omega_{0n} t)} \quad (15)$$

其中

$$c_{mn} = a_{mn} + j b_{mn} = \frac{1}{T_x T_y} \int_{-\frac{T_y}{2}}^{\frac{T_y}{2}} \int_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} f(x, y) e^{j(mx + ny)} dx dy \quad (16)$$

由傅立叶系数 c_{mn} 组成的级数(15)式，就为函数 $f(x, y)$ 的复指数形式的双重傅立叶级数。

3.2 逆变桥干扰源的数学模型

本论文所研究的三相逆变桥的PWM调制方式采用正弦脉宽调制方式，采样法使用对称规则采样法。针对SPWM调制方法，数学上可以将PWM载波和调制波分别用公式(9)和式(10)来描述，各项含义与式(9)和(10)均相同，对于两电平逆变器，在开关的导通区间，双变量调制函数为： $f(x, y) = 2U_{DC}$ 。则式(16)变为：

$$c_{mn} = \frac{1}{T_x T_y} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} 2U_{DC} e^{j(mx + ny)} dx dy \quad (17)$$

根据函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的表达式可知： $T_x = 2\pi$ ， $T_y = 2\pi$ ，外积分限为： $y_1 = -\pi$ ， $y_2 = \pi$ 。而内积分限的计算方法，可以根据图5所示的对称规则采样法的原理，利用三角形相似法可得：

$$\frac{\theta_2}{\pi} = \frac{1 + a \sin y}{2} \quad (18)$$

因此

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} (1 + a \sin y) \quad (19)$$

同理可得

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{2} (1 + a \sin y) \quad (20)$$

式中 a 为调制比。将 T_x 、 T_y 、 θ_1 和 θ_2 的表达式代入式(17)后可得:

$$c_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2} (1+a \sin y) 2U_{dc} e^{j(mx+ny)} dx dy \quad (21)$$

将式(21)积分结果经整理后可得:

$$c_{mn} = \frac{4U_{dc}}{m\pi} J_n\left(ma \frac{\pi}{2}\right) \sin\left[(m+n) \frac{\pi}{2}\right] \quad (22)$$

以下分别设 $\theta_0 = 0$ 、 $-\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$ ，可获得三相桥臂对直流母线中点的相电压，进而根据公式(7)和(8)可得到逆变桥输出侧的共模电压和差模电压的表达式为:

$$u_{SCM2} = \frac{4U_{dc}}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} J_{3n}\left(ma \frac{\pi}{2}\right) \sin\left[(m+3n) \frac{\pi}{2}\right] \cos(m\omega_c t + 3n\omega_0 t) \quad (23)$$

$$u_{SDM2} = -\frac{8U_{dc}}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} J_n\left(ma \frac{\pi}{2}\right) \sin\left[(m+n) \frac{\pi}{2}\right] \sin \frac{n\pi}{3} \sin\left[m\omega_c t + n(\omega_0 t - \frac{\pi}{3})\right] \quad (24)$$

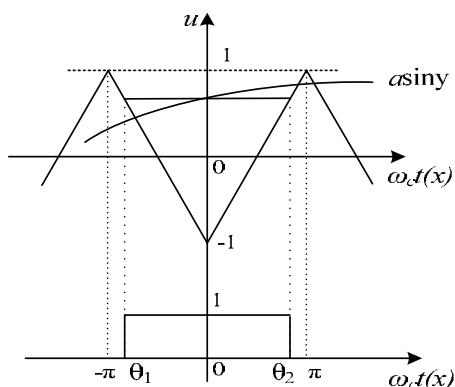
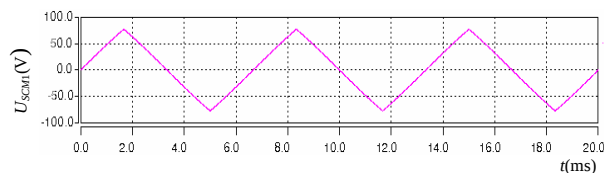


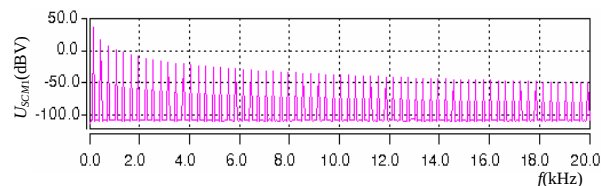
Figure 5. Sketch of symmetry rule sampling
图 5. 对称规则采样法的原理图

4 仿真及验证

在实验室里建立了三相整流-逆变-电机系统，对其传导干扰进行了仿真及测试。图 6 为整流桥侧共模电压的仿真结果，由图可见，其谐波次数为 $3(2n+1)$ ，其中 $n=0,1,2,3,4,\dots$ ，幅值逐渐衰减。图 7 为通过公式(5)计算出的整流桥侧共模电压的频谱，由图 6b)和图 7 的对比可见，计算值与仿真的结果完全一致，从而证明了公式(5)的正确性。



a) 时域波形



b) 频谱分析

Figure 6. Simulation result of CM voltage of rectifier bridge

图 6. 整流桥侧共模电压的仿真结果

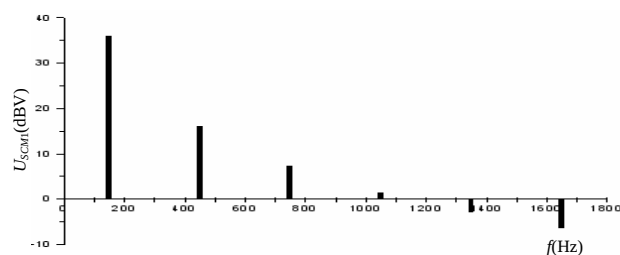


Figure 7. Calculated frequency spectrum

图 7. 由共模干扰源的数学模型计算出的频谱

图 8 为通过实验测得的整流桥侧的共模电压的时域波形，由图 8 与图 6a)比较可见，实验结果与仿真波形一致。图 9 为整流桥侧差模电压的仿真结果，由

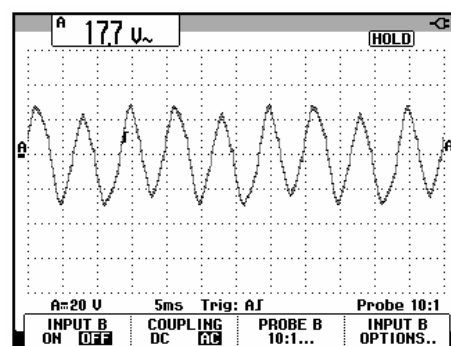


Figure 8. Experiment result of CM voltage of rectifier bridge

图 8. 整流桥侧共模电压的实验结果

图可见，其谐波次数为 $6n$ ，其中 $n=1,2,3,4,\dots$ ，幅值逐渐衰减。图 10 为通过公式(6)计算出的整流桥侧差模电压的频谱。

由图 9b)和图 10 的对比可见，计算值与仿真的频谱结果完全一致，从而证明了公式(6)的正确性。

图 11 为通过实验测得的整流桥侧的差模电压，由图 9a)与图 11 比较可见，实验结果与仿真波形一致。

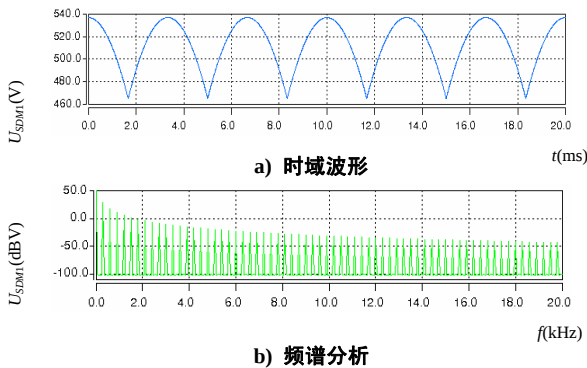


Figure 9. Simulation result of DM voltage of rectifier bridge

图 9 整流桥侧差模电压的仿真结果

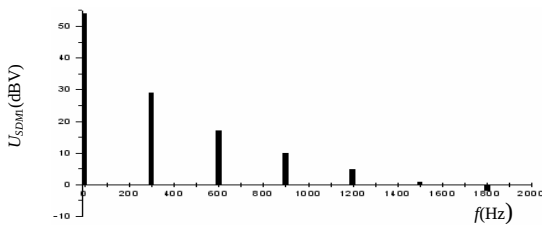


Figure. 10 Calculated frequency spectrum

图 10. 由差模干扰源的数学模型计算出的频谱幅值

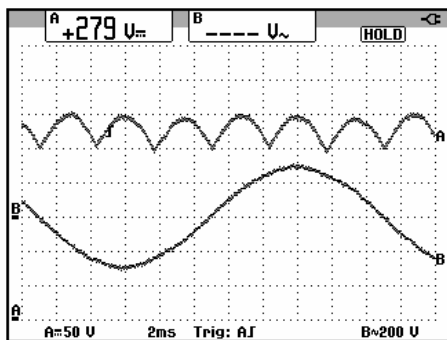


Figure 11. Experiment result of DM voltage of rectifier bridge

图 11 整流桥侧差模电压的实验结果

5 结论

本文对 PWM 驱动电机系统的共模和差模干扰进行了分析。采用傅立叶变换法对整流桥侧的干扰源进行数学建模，并利用双重傅立叶积分法推导出逆变桥侧精确的数学干扰模型。文中最后以一台感应电机系统为例，对其进行了实验验证，最后比较了该实验系统的仿真结果、数学模型的计算结果以及实验测量结果，对比结果除高频段有点误差外，其他频段比较一致，从而验证了所建立干扰源数学模型的正确性。本文所建立的干扰源的数学模型适用于所有的 PWM 变频驱动系统，并可用来预测系统的干扰发射。

References (参考文献)

- [1] Pei xue-jun, Kang Yong, Chen Jian, *et al.* Prediction of common mode conducted EMI in PWM inverter [J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(8):83-88(in Chinese).
裴雪军, 康勇, 熊健, 等. PWM 逆变器共模传导电磁干扰的预测[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(8): 3-88.
- [2] He Junping, Jiang Jianguo. Research on conducted EMI of an off-line PWM switched mode power supply [J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(6): 91-95.
和军平, 姜建国. 离线式 PWM 开关电源传导电磁干扰的分析研究[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(6): 91-95.
- [3] Li Ran, *et al.* Conducted electromagnetic emissions in induction motor drive systems part 1: time domain analysis and identification of dominant modes [J]. IEEE Trans. PE, 1998, 13 (4): 757-767.
- [4] Wei Chen, Pingping Chen, Limin Feng, Henlin Chen, Zhaoming Qian. Frequency Model for Differential-Mode Conducted EMI Prediction in Three-Phase PWM Inverter[C], IAS 2005: 2816-2819
- [5] B. Revol, J. Roudet, J. L. Schanen. EMI study of a three phase inverter-Fed Motor Drives[C]. IAS 2004: 2657-2664.
- [6] F Wang. Motor shaft voltage and bearing currents and their reduction in multilevel medium-voltage PWM voltage-source-inverter drive applications [J]. IEEE Trans. on Industry Applications, 2000, 36(5): 1336-1341.
- [7] T. A. Lipo Julian, G. Oriti *et al.* Elimination of Common Mode Voltage in Three Phase Sinusoidal Power Converters[C]. IEEE Transactions on Power Electronics. 2006, 15(14): 1968-1972.
- [8] Gary Skibinski, Rangarajan Tallam, Robert Reese. Common Mode and Differential Mode Analysis of Three Phase Cables for PWM AC Drives [C]. PESC2006: 880-888.
- [9] D G Holmes. A general analytical method for determining the theoretical harmonic components of carrier based PWM strategies[C]. IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, St. Louis, 1998: 1207-1214.