Scientific Research

Application of ARIMA Model in GPS Timing

LI Jianwen[1,2], CHEN Jun[2], LI Zuohu[2], LI Junzheng[2]

[1] *GNSS Research Center, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China*

[2] *Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou, Henan, China,* 450052

e-mail: zzljw@126.com; chenjun983524@163.com

Abstract: With the GPS gradually builds up, more and more people begin to apply it ,and its high precise atomic clock makes the precise of time transfer achieve a high level. At first, the clock offset data from GPS receiver are analyzed by using ARMA model. Then, the clock offset prediction model is presented. The experiment result shows that the new model is fit for GPS timing.

Keywords: global positioning system (GPS); ARIMA model; time transfer; prediction

ARIMA 模型在 GPS 授时中的应用

李建文 [1,2]， 陈军 [2]， 李作虎 [2]，李军正 [2]

[1] 武汉大学卫星导航定位技术研究中心，武汉，湖北，中国，430079

[2] 信息工程大学测绘学院，郑州，河南，中国，450052

e-mail: zzljw@126.com; chenjun983524@163.com

摘　要: 随着全球定位系统(GPS)的逐步完善，其应用也越来越广泛。由于GPS卫星采用高精度的星载原子钟，使得利用GPS接收机授时可以达到比较理想的精度。本文利用ARIMA模型对GPS接收机的钟差数据进行建模分析，通过拟合比对，建立合适的预报模型，预报的精度达到了较好的效果。

关键词: 全球定位系统(GPS)； ARIMA模型； 授时； 预报

1 引言

时间作为一个基本的物理量，其基准所能达到的准确度和稳定度等级直接关系着一个国家基础科学研究、国民经济稳定运行和国防建设的各个方面。由于时间基准的数量是有限的，因而各个国家在研制高精度时间频率源的同时，也不断加强授时技术的研究。卫星导航系统作为一种新型的高精度的授时系统近年来得到了广泛而深入的研究。在卫星测距导航定位系统中，用户在空间参考系中的位置坐标(X，Y，Z)是通过测量卫星和用户之间的距离获得的。根据卫星定位理论，同时观测四颗以上的卫星即可求得位置和钟差，利用钟差即可计算出当前的时刻，从而进行授时[1,2]。随着我国二代导航系统的逐步建立和完善，利用我国的二代导航系统进行授时也具有了相当重要的意义。

ARIMA(Autoregressive Integrated Moving Average)模型是 Box 和 Jenkins 于 20 世纪七十年代提出的，它将自回归模型(Autoregression, AR)和滑动平均模型(Moving Average, MA)有机地组合起来，使之成为一种综合的预测方法[3]。

本文拟采用基于时间序列分析理论的预报方法的 ARIMA 模型来对钟差进行预报，从而达到利用 GPS 进行授时的目的。

2 ARIMA 模型

ARIMA 模型是将时间序列模型 AR 模型、MA 模型、ARMA 模型进行了综合，另外，该模型还考虑到了原始数据的预处理。在实际应用中，原始数据序列往往呈现一定的趋势或周期特征，显然，这类数据序列不能满足 ARMA 模型对时间序列的平稳性要求。而对原始数据进行差分运算时消除趋势性比较简单易行的方法。我们就把用差分后的数据序列建立的时间序列模型成为 ARIMA 模型。简记为 $\{X_t\} \sim$ ARIMA(p,d,q)，其中，p、q 称为模型的阶，d 表示差分的次数。与我们平常的模型比较可以看出，当 p 为 0 时，该模型就变成了 MA 模型；当 q 为 0 时，该模型就变成了 AR 模型；当 d 为 0 时，该模型就变成 ARMA 模型了。本文我们采用 ARIMA(p,d,q)模型的特殊形式，即 q 为 0 时的 ARIMA(p,d,q)模型。

显然，用 ARIMA 进行建模和预测的关键是根据数据序列的特性正确合理地确定相应的模型以及适当

978-1-935068-03-7 © 2009 SciRes.

的阶数。各种模型的特性可以通过其自相关和偏相关函数反映出来[4]。

自相关函数的计算公式为：

$$r_k=\frac{\sum_{t=k+1}^{n}\left(x_t-\bar{x}\right)\left(x_{t-k}-\bar{x}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(x_t-\bar{x}\right)^2} \tag{1}$$

其中，r_k 为自相关函数，x_t 为数据序列，$\bar{x}$ 为数据序列的均值。

偏相关函数的计算公式为：

$$\begin{cases}\phi_{k,k}=r_1 & k=1\\ \phi_{k,k}=\dfrac{r_k-\sum_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}\cdot r_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}\cdot r_j} & k=2,3,\ldots\\ \phi_{k,j}=\phi_{k-1,j}-\phi_{k,k}\cdot\phi_{k-1,k-j} & k=2,3,\ldots,\ j=1,2,\ldots,k-1\end{cases} \tag{2}$$

式中 ϕ 为偏相关函数，r_k 为自相关函数。

通过计算自相关以及偏相关函数可以粗略地判断模型的阶数，而要获得比较准确的阶数通常采用赤池弘治 1976 年提出的 BIC 准则，其准则函数为：

$$\mathrm{BIC(p)}=N\ln\sigma_a^2+\mathrm{p}\ln N \tag{3}$$

取 BIC(p)值最小时的模型阶次 P 为适用模型阶次。

3 模型参数确定

对于 AR 模型[4,6]：

$$\begin{aligned}&x_t=\varphi_1x_{t-1}+\varphi_2x_{t-2}+\cdots+\varphi_nx_{t-n}+a_t\\&a_t\sim NID(0,\sigma_a^2)\end{aligned} \tag{4}$$

所谓参数估计，理应是指根据经检验和预处理后的时序 $\{x_n\}$ 按某一方法估计出 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 和 σ_a^2 共 $n+1$ 个参数。因为

$$a_t=x_t-\varphi_1x_{t-1}-\varphi_2x_{t-2}-\cdots-\varphi_nx_{t-n} \tag{5}$$

$$\sigma_a^2=\frac{1}{N-n}\sum_{t=n+1}^{N}(x_t-\sum_{i=1}^{n}\varphi_ix_{t-i})^2 \tag{6}$$

所以估计出 φ_i，即可按上式估计出 σ_a^2，因此，通常所指的参数估计是估计 $\varphi_i\,(1=1,2,\cdots,n)$ 参数，共 n 个参数。

AR模型参数估计的方法比较多，在本文中利用直接估计法中的最小二乘估计法进行估计，具体方法如下，将时间序列直接代入式(1)，得以下线性方程组[5,6]：

$$\begin{aligned}&x_{n+1}=\varphi_1x_n+\varphi_2x_{n-1}+\cdots+\varphi_nx_1+a_{n+1}\\&x_{n+2}=\varphi_1x_{n+1}+\varphi_2x_n+\cdots+\varphi_nx_2+a_{n+2}\\&\quad\cdots\\&x_N=\varphi_1x_{N-1}+\varphi_2x_{N-2}+\cdots+\varphi_nx_{N-n}+a_N\end{aligned} \tag{7}$$

用矩阵的形式表示为：

$$\hat{\varphi}=\left(x^Tx\right)^{-1}x^Ty \tag{8}$$

式中，

$$y=[x_{n+1}\quad x_{n+2}\quad\cdots\quad x_N]^T \tag{9}$$

$$\varphi=[\varphi_1\quad\varphi_2\quad\cdots\quad\varphi_n]^T \tag{10}$$

$$a=[a_{n+1}\quad a_{n+2}\quad\cdots\quad a_N]^T \tag{11}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_n & x_{n-1} & \cdots & x_1\\ x_{n+1} & x_n & \cdots & x_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_{N-n}\end{bmatrix} \tag{12}$$

根据多元回归理论，参数矩阵 φ 的最小二乘估计为：

$$\hat{\varphi}=\left(x^Tx\right)^{-1}x^Ty \tag{13}$$

4 计算和分析

本文采用了 IGS 发布的自 2007.07.30 0h0m0s 至 2007.07.30 23h55m0s 一天的精密星历数据。算例选取了其中一个观测站的接收机钟差数据如图所示，

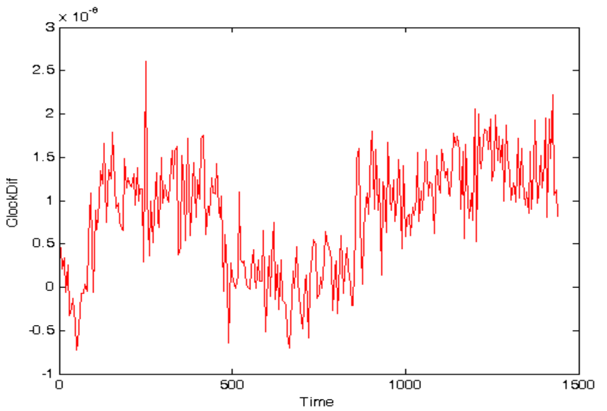

Figure 1. Curve: Clock bias of station
图 1. 测站的钟差曲线图

对于 ARIMA(p,d,0)模型，我们此处 d = 1,即对数据序列做一次差分，再分别取一天 2 小时、4 小时、6 小时、8 小时、10 小时、12 小时的钟差数据去拟合 AR(3), AR(5), AR(8)模型，并将其与 IGS 提供的精密钟差进行作差并与差值进行比较。IGS 精密星历钟差精度优于 1 ns，可作为真值，用于检验模型的预报精度，下面采用建立的模型对数据序列进行计算。

Table 1. BIC(p) of AR(P) model in 2 hours
表 1. 2 小时拟合 AR(p)模型的 BIC(p)值

P	BIC(p)
3	9.567030035452327e+002
4	-9.523719005989054e+002
5	-9.466897989914691e+002
6	-9.444438818465551e+002
7	-9.413738660171835e+002
10	-9.203808021587283e+002

Table 2. AR(3) model of different time span
表2. 不同时间段的AR(3)模型

时间	预报值	参考值
2 小时	1.128620416080121e-008	1.666126273280000e-008
4 小时	3.220809297351929e-008	2.609140878785000e-008
6 小时	1.032821703931932e-008	1.722088760861000e-008
8 小时	1.267058579599299e-009	-6.425142918690000e-009
10 小时	-1.235304240644051e-009	-1.080566588370000e-009

Table 3. AR(3) model of 6 hours
表3. 6小时的AR(p)模型

模型	预报值	参考值
AR(3)	1.032821703931932e-008	1.722088760861000e-008
AR(5)	9.054051810101145e-009	1.722088760861000e-008

在ARIMA(p,d,0)计算中，本文首先对原始数据序列进行了一次差分，将原来的非平稳随机过程转化为平稳随机过程，再在新的平稳随机过程的基础上建立了AR模型，通过实际计算和数据比较，预报值的精度能够满足一定的需求，而且当取六小时的钟差数据并拟合AR(3)模型时精度是最好的，可以在实际的应用中加以利用。由计算比对的结果可得出以下结论：

(1) 在实际应用中由赤池弘治提出的BIC准则式(3)可以确定AR模型的阶数；由表1的数据可知，AR(3)模型的BIC值最小，而且表3的数据表明实际过程中AR(3)模型的拟合精度也比其他的高，因此我们取AR(3)模型进行实验来预报接收机的钟差。

(2) AR(3)模型的2小时、4小时、6小时、8小时、10小时的预报精度，约在ns级，因而这预报模型都能满足实际的需要。在实际应用中，可以用AR(3)模型预报接收机的钟差。

(3)上述的模型是对原始数据进行一次差分建立新的数据序列，此时得到的新的数据序列是平稳的，满足AR模型的建立条件。

5 结论

GPS 具有全球性、全天候、高精度等优点，利用 GPS 精密授时功能可以快速、精确、实时地获得位置和时间信息。随着科学技术的发展，精确的时间同步需求也越来越广泛。本文在 GPS 接收机精密钟差的基础上，试着将该模型作为接收机钟差的预报模型，得出了如下结论：

(1) ARIMA(p,d,0)模型充分利用历史数据反映数据的变化规律，通过差分建立模型对数据序列进行预估能够得到较高精度的数据，但是在应用中需要注意的是非平稳随机过程的原始数据序列进行一次差分后得到的仍然是非平稳随机过程，就必须重新考虑，而不能继续利用新的非随机过程数据序列建模；

(2) 本文中研究的是十二个小时时间段以内的钟差预报中，属于短期预报，且 AR(3)预报精度基本满足需求，在实际应用中可以采用该模型来进行短期的预报；

(3) 由于 AR 模型预报 GPS 接收机钟差时其误差具有明显的累积效应，长期预报需要进一步进行研究。

References (参考文献)

[1] Gao Yuping. Applications in GPS Timing of GIS Productions. Journal of Astronomy[J], 2004.03.
高玉平. IGS 产品在 GPS 时间比对中的应用[J]. 天文学报, 2004.03.

[2] Wang Shufang, Wang Liliang. Time Synchronization Technique of Satellite Navigation and Positioning System[J], 2005.02.
王淑芳, 王礼亮. 卫星导航定位系统时间同步技术[J]. 全球定位系统, 2005.02.

[3] Fu Deyin, Liu XiaoMei. Methods and Applications of Prediction [M]. WuHan: WuHan University publishing company, 2003.
傅德印, 刘晓梅. 预测方法与应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003.

[4] Gui Qinming. Random Process. Surveying and Mapping Institute. 1996.11.
归庆明. 随机过程. 解放军测绘学院, 1996.11.

[5] Huang WeiBin. Theories and Applications of Adjustment[M]. BeiJing: Publishing Company of PLA. 1992.
黄维斌. 近代平差理论及其应用[M]. 北京: 解放军出版社, 1992.

[6] Yang Shuzi, WuYa, Xuan Jianping. Engineering Applications od Time serials[M]. 2007.06.
杨叔子, 吴雅, 轩建平等. 时间序列分析的工程应用[M], 2007.06.

978-1-935068-03-7 © 2009 SciRes.