

# Scattering Phase Function of Aerosol Particles at Different Laser Wavelength

Sheng KANG, Jiang'an WANG, Dong CHEN, Ronghua WU, Xichuang REN  
Electronic Engineering Institute of Naval University of Engineering, Wuhan,, China  
Email: ks.kkk.sss@163.com

**Abstract:** Scattering phase function is one of the most important optical parameters of medium. In this paper, scattering phase function of different particle radius at different laser wavelengths was calculated by recursive formula of Mie theory and the experiential formula of Wiscombe. On the assumption that non-one particle radius obeying lognormal distribution, scattering phase function at 1.06  $\mu\text{m}$  laser wavelength was calculated, then the result was analyzed simply. Experimental results indicated that the forward and backward scattering peaks of phase function increased when the radius of particle increased. At the same time, when the ratio of the wavelength of incident light to the radius of particle decreased, phase function dithered acutely. In the end, the scattering phase function of non-one particle radius was calculated by Mie theory. The result indicated that the scattering phase function of non-one particle radius dithered more acute than the scattering phase function of one particle radius did, especially for backward scattering.

**Keywords:** Scattering; Phase Function; Aerosol; Spherical Particle

## 不同波长激光气溶胶粒子散射相函数分析

康 圣, 王江安, 陈 冬, 吴荣华, 任席闯  
海军工程大学电子工程学院, 武汉, 中国, 430033  
Email: ks.kkk.sss@163.com

**摘 要:** 散射相函数是介质的一个重要光学参数, 利用递推 Mie 散射公式及 Wiscombe 经验公式计算了不同波长、不同粒径的气溶胶球形粒子散射相函数, 在假定多分散系气溶胶粒子服从对数正态分布的前提下, 计算了 1.06  $\mu\text{m}$  波长激光的散射相函数, 并对结果进行了分析。结果显示: 散射相函数前后向峰值随粒子直径的增大而增大; 入射波长与粒子直径比越小, 散射相函数小角度抖动越剧烈; 多分散系粒子散射相函数比同一波长单一粒子相函数抖动幅度大, 特别是在后向散射。

**关键词:** 散射; 散射相函数; 气溶胶; 球形粒子

### 1 引言

在激光测距、激光制导、自由空间激光通讯、激光雷达等领域, 大气气溶胶粒子散射相函数是一个非常重要的物理量, 它反映了气溶胶粒子散射光强度的空间分布, 包含颗粒大小和形状的信息, 是研究粒子与光束相互作用的重要途径之一, 它的确立对激光多次散射特性研究过程中常用的蒙特卡罗法、离散坐标法等计算方法都十分重要<sup>[1] [2]</sup>。

散射相函数是介质的一个重要光学参数, 其选取的好坏, 很大程度上决定了多次散射研究中计算时间和计

资助信息: 受 863 某重大专题及“十一五”海军装备预先研究项目(批准号: 401060702) 资助

算精度。目前多次散射研究中多采用某些近似的散射相函数, 例如, Henyey-Greenstein(H-G)函数、改进的 H-G 函数等, 但是这些近似的散射相函数的准确性都需以 Mie 散射相函数进行检验, 此外这些近似的相函数还需要知道非对称因子  $g$  值, 这些问题都对仿真运算带来了一定的麻烦, 因此本文在假设气溶胶粒子近似为球形的前提下, 利用经典的 Mie 氏理论计算不同波长激光气溶胶粒子的散射相函数。计算结果显示: 散射相函数前后向峰值随粒子直径的增大而增大; 入射波长与粒子直径比越小, 散射相函数小角度抖动越剧烈; 多分散系粒子散射相函数比同一波长单一粒子相函数抖动幅度大, 特别是在后向散射。

## 2 Mie 散射相函数递推计算

### 2.1 Mie 氏散射基本理论

Mie 散射理论是将 Lorenz 电磁场理论用于研究微小半径粒子对电磁场的吸收和散射的经典理论，是对均匀介质的球形颗粒在单色平行光照射下的电磁场方程的精确解，1908 年由 Mie 提出<sup>[3]</sup>。多年来，国外许多学者发表了对 Mie 散射的数值解法。1968 年 Dave 的算法是首次完整的 Mie 计算程序<sup>[4]</sup>。1976 年 Lentz 利用连分式解决了递推不稳的难题<sup>[5]</sup>。1980 年 Wiscombe 总结了前人的方案，改良了倒推算法并采用矢量结构运算进一步改进了 Mie 算法<sup>[6]</sup>。近年来，国内学者也发表了很多 Mie 散射计算方面的观点<sup>[7]-[10]</sup>。

由 Mie 散射理论，若入射光是强度为  $I_0$  的自然光则与气泡中心 O 相距为  $r$  处 P 点的散射光强为：

$$I_{sca} = I_0 \frac{\lambda^2}{8\pi^2 r^2} I(\theta, \varphi) \quad (1)$$

式中与角度相关的散射光强度  $I(\theta, \varphi)$  为：

$$\begin{aligned} I(\theta, \varphi) &= I_1 \sin^2 \varphi + I_2 \cos^2 \varphi \\ &= |S_1(\theta)|^2 \sin^2 \varphi + |S_2(\theta)|^2 \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

$I_1, I_2$  分别表示垂直及平行于散射平面的散射强度函数分量，而  $S_1, S_2$  表示幅值函数，具有无穷级数的形式：

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)] \quad (3)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos \theta) + b_n \pi_n(\cos \theta)] \quad (4)$$

式(3)、式(4)中  $a_n, b_n$  为 Mie 散射系数，是尺度参数  $\alpha = 2\pi R / \lambda$ 、相对折射率  $m$  的函数：

$$a_n = \frac{m \varphi_n(m\alpha) \varphi_n^{(1)}(\alpha) - \varphi_n(\alpha) \varphi_n^{(1)}(m\alpha)}{m \varphi_n(m\alpha) \xi_n^{(1)}(\alpha) - \xi_n(\alpha) \varphi_n^{(1)}(m\alpha)} \quad (5)$$

$$b_n = \frac{\varphi_n(m\alpha) \varphi_n^{(1)}(\alpha) - m \varphi_n(\alpha) \varphi_n^{(1)}(m\alpha)}{\varphi_n(m\alpha) \xi_n^{(1)}(\alpha) - m \xi_n(\alpha) \varphi_n^{(1)}(m\alpha)} \quad (6)$$

其中  $\varphi_n(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(z)$ ，

$$\xi_n(z) = \varphi_n(z) + i x_n(z),$$

$$x_n(z) = -\left(\frac{\pi z}{2}\right)^{1/2} N_{n+1/2}(z)$$

式中的  $J_{n+1/2}(z)$  和  $N_{n+1/2}(z)$  分别为半奇解的第一类贝赛尔函数和第二类贝赛尔函数。 $\varphi^{(1)}, \xi^{(1)}$  为其自变量的微商。

$\pi_n, \tau_n$  为散射角函数，由式(7)、(8)给出：

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{P_n^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} = \frac{d P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} \quad (7)$$

$$\tau_n(\cos \theta) = \frac{d P_n^{(1)}(\cos \theta)}{d \theta} \quad (8)$$

式(7)、式(8)中  $P_n$  为 Legendre 函数，

$$P_n^{(1)}(x) = dP_n(x)/dx.$$

Mie 理论给出的振幅函数的计算公式(3)、(4)涉及无穷级数和，因此无法直接计算。然而由于  $n$  很大时， $a_n, b_n$  的模已经很小，所以可以考虑只计算级数的前  $N_{stop}$  项之和。 $N_{stop}$  选取十分重要： $N_{stop}$  选取太小则计算误差太大，反之则计算周期太长，本文  $N_{stop}$  的选取按照 Wiscombe 给出的经验公式求得<sup>[6]</sup>。

### 2.2 散射角函数递推计算

由于散射角函数  $\pi_n, \tau_n$  只与散射角  $\theta$  有关，因此它们的计算相对比较简单。由散射角函数  $\pi_n$  的定义可得：

$$P_n^{(1)}(\cos \theta) = \sin \theta \cdot \pi_n(\cos \theta) \quad (9)$$

又由散射角函数  $\tau_n$  的定义有：

$$\begin{aligned} \tau_n(\cos \theta) &= \frac{d}{d \theta} [\sin \theta \cdot \pi_n(\cos \theta)] \\ &= \cos \theta \cdot \pi_n(\cos \theta) - \sin^2 \theta \frac{d \pi_n(\cos \theta)}{d \cos \theta} \end{aligned} \quad (10)$$

根据缔合勒让德函数递推公式有：

$$\begin{aligned} \pi_n(\cos \theta) &= \frac{2n-1}{n-1} \cos \theta \cdot \pi_{n-1}(\cos \theta) \\ &\quad - \frac{n}{n-1} \pi_{n-2}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)左右两边对  $\cos \theta$  求导得：

$$\frac{d\pi_n(\cos\theta)}{d\cos\theta} = \frac{2n-1}{n-1}\pi_{n-1}(\cos\theta) + \frac{2n-1}{n-1}\cos\theta - \frac{d\pi_{n-1}(\cos\theta)}{d\cos\theta} - \frac{n}{n-1}\frac{d\pi_{n-2}(\cos\theta)}{d\cos\theta} \quad (12)$$

方程(11)、(12)即为角度函数  $\pi_n$ 、 $\frac{d\pi_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}$  的递推公式。其中  $\pi_n$  的初值为:

$$\pi_1(\cos\theta) = 1, \quad \pi_2(\cos\theta) = 3\cos\theta \quad (13)$$

从而  $\frac{d\pi_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}$  的初值为:  $\frac{d\pi_1(\cos\theta)}{d\cos\theta} = 0$  (14)

$$\frac{d\pi_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}$$

由  $\pi_n$ 、 $\frac{d\pi_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}$  的递推公式(11)、(12)结合初值即可递推得到散射角函数  $\pi_n$ 、 $\tau_n$ 。

### 2.3 散射系数 $a_n$ 、 $b_n$ 的计算

散射系数计算公式中的  $\xi_n(\alpha)$  可表示为:

$$\xi_n(\alpha) = \varphi_n(\alpha) + i\chi_n(\alpha) \quad (15)$$

式中  $\chi_n(\alpha) = -\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/2} N_{n+\frac{1}{2}}(\alpha)$ ,  $N_{n+\frac{1}{2}}(\alpha)$  为

Neumann 函数。

$\varphi_n(\alpha)$ 、 $\chi_n(\alpha)$  存在如下递推公式:

$$\begin{cases} \varphi_n(\alpha) = \frac{2n-1}{\alpha}\varphi_{n-1}(\alpha) - \varphi_{n-2}(\alpha) \\ \chi_n(\alpha) = \frac{2n-1}{\alpha}\chi_{n-1}(\alpha) - \chi_{n-2}(\alpha) \\ \varphi_n'(\alpha) = -\frac{n}{\alpha}\varphi_n(\alpha) + \varphi_{n-1}(\alpha) \\ \chi_n'(\alpha) = -\frac{n}{\alpha}\chi_n(\alpha) + \chi_{n-1}(\alpha) \end{cases} \quad (16)$$

初始值设定为:

$$\begin{cases} \varphi_0(\alpha) = \sin(\alpha) \\ \varphi_{-1}(\alpha) = \cos(\alpha) \\ \chi_0(\alpha) = \cos(\alpha) \\ \chi_{-1}(\alpha) = -\sin(\alpha) \end{cases} \quad (17)$$

根据公式(16)、(17)、(18)可求得各阶函数值, 逐步代回公式(5)、(6), 就可以求出散射系数  $a_n$ 、 $b_n$ 。

对散射光强在所有方向上进行积分后除以颗粒的投影面积得散射系数:

$$Q_{sc}(\alpha, m) = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (18)$$

同理消光系数为:

$$Q_{ex}(\alpha, m) = \frac{2}{\alpha^2} \text{Re} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n + b_n) \right) \quad (19)$$

### 2.4 散射相函数的定义及计算

光在某个给定方向单位立体角中散射的能量与在所有方向上平均的单位立体角中的散射能量之比, 称为散射相函数  $P(\theta, \lambda)$ , 可表示为:

$$P(\theta, \lambda) = \frac{4\pi}{\beta_{sc}(\lambda)} \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} n(r) dr$$

$$\frac{I_1(a, m, \theta) + I_2(a, m, \theta)}{2} dr \quad (20)$$

其中,  $\beta_{sc}(\lambda)$  为体散射系数, 可表示为:

$$\beta_{sc}(\lambda) = \pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 n(r) Q_{sc}(a, m) dr \quad (21)$$

对于单分散系, 公式(21)可表示为:

$$P(\theta, \lambda) = \frac{2(|S_1|^2 + |S_2|^2)}{Q_{sc} a^2} = \frac{2(I_1 + I_2)}{Q_{sc} a^2} \quad (22)$$

将式(3)、(4)、(9)代入式(20)和式(22)即可求得多分散系或单分散球形粒子的散射相函数。

### 3 不同波长激光散射相函数对比

对于低层大气来说, 气溶胶微粒的尺寸分布极其复杂。在能见度特别好且湿度低的晴天里, 气溶胶微粒的半径大部分在  $0.1 \sim 1 \mu m$  之间, 少量在  $1 \sim 10 \mu m$  之间; 在阴霾天气, 气溶胶主要由半径  $0.03 \mu m$  到  $0.2 \mu m$  之间的微粒组成; 各种浓度的雾粒子的半径在  $3 \sim 60 \mu m$  之间; 云粒子的半径在  $2 \sim 30 \mu m$  之间; 而雨粒子的半径则更大些, 一般在  $60 \sim 2000 \mu m$  之间。因此在散射相函数的计算中对于单分散系粒子, 本文所选取的粒子直径分别为  $1 \mu m$ 、 $10 \mu m$ 、 $50 \mu m$ 、 $100 \mu m$ , 根据资料<sup>[11]</sup>、<sup>[12]</sup>我们所选取的光学折射率为典型值  $1.65+0.01i$ 。对于激光波长, 我们主要选取了常见的  $0.355 \mu m$ 、 $0.532 \mu m$ 、 $1.06 \mu m$  与  $10.6 \mu m$

等波长的激光，此外为了观看方便本文对相函数的计算结果取了对数，结果见图 1~图 4：

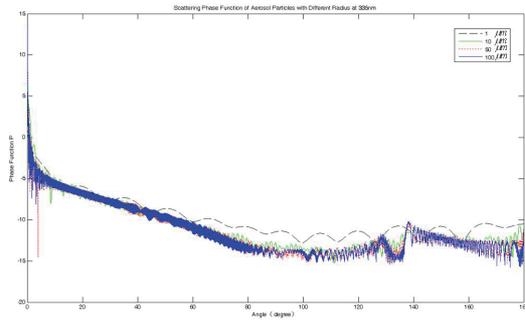


Figure 1. The Phase Function at 355nm Laser Wavelength  
图 1. 355nm 波长激光散射相函数分布图

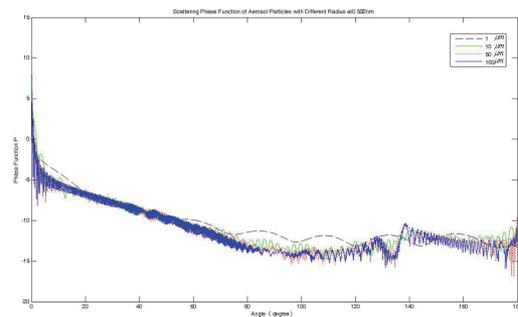


Figure 2. The Phase Function at 532nm Laser Wavelength  
图 2. 532nm 波长激光散射相函数分布图

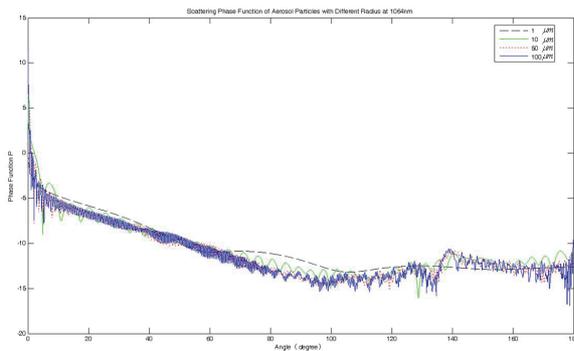


Figure 3. The Phase Function at 1064nm Laser Wavelength  
图 3. 1064nm 波长激光散射相函数分布图

同过对比图 1-4, 可以看出不同波长激光对不同直径气溶胶粒子产生的散射相函数具备以下特点：

1)、随着粒子直径的增大，前向散射、后向散射的相函数峰值均随之增大，这与散射理论的结果是一致的；

2)、入射波长与粒子直径的比值越小，散射相函数小角度抖动越大。对比图 1 与图 4, 同样直径为 1 μm

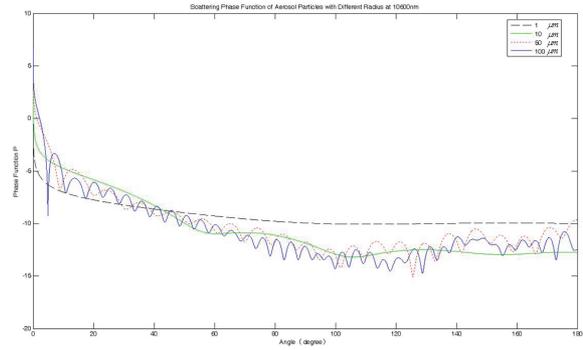


Figure 4. The Phase Function at 10600nm Laser Wavelength  
图 4. 10600nm 波长激光散射相函数分布图

的粒子 0.335 μm 激光产生的散射相函数要比 10.6 μm 激光产生的散射相函数产生的小角度抖动大得多，此外对比图 1~2 中当激光波长不变粒子直径越大则随角度的抖动越剧烈。

3)、散射相函数在后向约 140 度方向存在一个峰值。

#### 4 多分散系气溶胶散射相函数

对于多分散系气溶胶粒子散射相函数的计算，研究重点在于粒子谱分布函数  $n(r)$  的情况。目前公开发表的气溶胶粒子谱分布函数很多，包括：指数分布、修正  $\Gamma$  分布、对数正态分布等。实践表明，对于通常情况低层大气气溶胶最好的粒子谱分布函数是对数正态分布函数<sup>[12]</sup>。

$$n(r) = \frac{dN}{d \ln r} = \frac{N}{\sqrt{2\pi} \ln \delta} \exp\left[-\frac{(\ln r - \ln r_{bar})^2}{2(\ln \delta)^2}\right] \quad (23)$$

其中  $r_{bar}$  为平均半径， $\delta$  为标准偏差， $N$  为单位体积粒子数。由公式(21)、(21)、(23)可计算多分散系激光散射相函数。这里假定激光波长  $\lambda = 1.06 \mu m$ ，粒

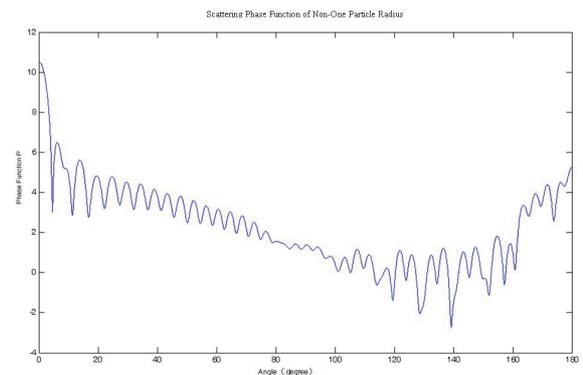


Figure 5. Phase Function of Non-one Particle Radius at 1064nm Laser  
图 5. 多分散系散射相函数分布图

子最小半径为  $0.001 \mu\text{m}$ ，最大半径为  $10 \mu\text{m}$ ，折射率仍为  $1.65+0.01i$ ， $r_{bar} = 5 \mu\text{m}$ ， $\delta = 0.02$ ， $N = 10^{10} m^{-3}$ ，由公式(20)可得散射相函数如图 5:

从图 2 中我们可以看到多分散系粒子相函数比同一波长下单一粒子相函数抖动幅度要大，特别是在后向散射，这主要可能是不同粒径随角度变化的一种叠加效果。此外，较强的后向散射信号对于大气探测激光雷达领域是有用的，而对于激光测距、激光制导、自由空间激光通讯等领域属于噪声信号应予以避免。

## 5 结论

本文利用递推 Mie 散射公式及 Wiscombe 给出的经验公式计算了不同波长、不同粒径的球形粒子散射相函数，并计算了分散系气溶胶粒子  $1.06 \mu\text{m}$  波长激光的散射相函数。

通过分析比较，得出如下结论：

1)、散射相函数随着粒子直径的增大，前向散射、后向散射的峰值均随之增大；

2)、入射波长与粒子直径的比值与散射相函数小角度抖动剧烈程度成反比；

3)、多分散系粒子相函数比同一波长下单一粒子相函数抖动幅度大，特别是在后向散射。

其中，结论 1)与文献<sup>[1]</sup>的研究结果相吻合，结论 2 在文献<sup>[12]</sup>中也有类似报道。

## References (参考文献)

[1]. Yuan Yi-jun, Ren De-ming, Hu Xiao-hong. Computing Scattering

Phase Function by Recursive Formular of Mie Theory[J]. Chinese Journal of Light Scattering, 2006, 4(17):366-371.

袁易君, 任德明, 胡孝勇. Mie 理论递推公式计算散射相位函数[J]. 光散射学报, 2006, 4(17): 366-371.

- [2]. D Toublanc. Henyey-Greenstein and Mie Phase Functions in Monte Carlo radiative transfer computations[J]. Appl. Opt. 1996, 35(18):3270-3274.
- [3]. Van de Hulst H C. Light Scattering by Small Particles. New York: Wiley, 1957, 1-5.
- [4]. Dave J V. Scattering of visible light by large water sphere. Appl Opt, 1969, 8: 155-164.
- [5]. Lentz W J. Generating Bessel functions in Mie scattering calculations using continued fractions[J]. Appl. Opt., 1976, 15(3): 666-671.
- [6]. Wiscombe W J. Improved Mie scattering algorithms[J]. Appl. Opt., 1980, 19(9): 1505-1509.
- [7]. Gu Guanliang, Wang Naining. Numerical Calculation of Light Scattering[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 1984, 5(4): 21-34.
- 顾冠亮, 王乃宁. 有关光散射的物理量的数值计算. 上海理工大学学报, 1984, 5(4): 21-32.
- [8]. Zheng Gang, Cai Siao-shu, Wang Naining. Numerical Calculation of Mie Scattering[J]. Applied Laser, 1992, 12(5): 220-222.
- 郑刚, 蔡小舒, 王乃宁. Mie 散射的数值计算[J]. 应用激光, 1992, 12(5): 220-222.
- [9]. Gong Jianqi, Wang Naining, Gu Guanliang. Numerical calculation of physical quantities in light scattering with large particles[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 1997, 19(2): 17-24
- 沈建琪, 王乃宁, 顾冠亮. 光散射物理量数值计算方法对较大颗粒的应用. 上海理工大学学报, 1997, 19(2): 17-24.
- [10]. Yang Ye, Zhang Zhenxi, Jiang Dazong. Numerical Calculation of Mie Scattering[J]. Journal of Applied Optics, 1997, 18(4): 17-19
- 杨晔, 张镇西, 蒋大宗. Mie 散射物理量的数值计算. 应用光学, 1997, 18(4): 17-19.
- [11]. McCartney E J. Optics of the atmosphere scattering by molecules and particles [M]. John Wiley & Sons, Inc. 1976.
- [12]. Lin chin, Baker M, Charlson R J. Absorption coefficient of atmospheric aerosol: a method of measurement, Appl Opt, 1973, 12(6): 1356-1363.