

# A New Method for Generation of Multiple Uncorrelated Rayleigh Fading Waveforms

Kai HU, Chen CUI

702 Laboratory, Electronic Engineering Institute, Hefei, China

e-mail:hukai821@sohu.com

**Abstract:** In this paper, a new closed-form solution is presented for the parameters computation of the multiple uncorrelated Rayleigh fading models. The new model employs random Doppler frequency wobble for all individual sinusoids based on the method of exact Doppler spread (MEDS). And the second-order statistics of the new model match the desired ones exactly better than the generalized method of exact Doppler spread (GMEDS) even if the number of sinusoids is a single-digit integer, and compare to the original MEDS the new model has random Doppler frequency, ensure the unification of uncorrelation and ergodicity of fading channels; The proposed methods are useful for the design of simulation models for diversity-combined Rayleigh fading channels, frequency-selective channels, and multiple-input multiple-output (MIMO) channels. Moreover, the random wobble amplitude can be set according to project needs, simulation pictures show that this new model is simple and effective.

**Keywords:** uncorrelated, Rayleigh fading, simulation, method

## 一种新的多个不相关瑞利衰落波形仿真方法

胡凯, 崔琛

合肥电子工程学院 702 实验室, 合肥, 中国 2300372

e-mail:hukai821@sohu.com

**摘要:** 本文提出了一种新的用于仿真多个不相关瑞利衰落波形方法, 在原精确多普勒扩展方法的基础上引入随机频率抖动。仿真数据和图形表明, 在模型复杂度较低的情况下, 新的信道模型的自相关和互相关特性较通用精确多普勒扩展法有很大改善, 与原始精确多普勒扩展法相比, 新模型多普勒频率为随机变量, 可以有效仿真瑞利衰落、多个独立瑞利衰落和频率选择性衰落信道等, 并且可以结合工程需要设定随机抖动幅度, 保证了衰落信道的不相关性和遍历性的有机统一。

**关键词:** 不相关; 瑞利衰落; 仿真; 方法

仿真多个不相关瑞利衰落波形对频率选择性衰落信道、宽带通信系统以及MIMO技术的发展有着重要的推动作用, 而对于瑞利衰落波形的仿真, Jakes法[1]一直被沿用至今, 但是由于Jakes模型自身固有的缺陷导致其在仿真多个独立衰落波形或频率选择性衰落信道时不能满足设计要求, 其改进模型也相继被提出[4-9], 有关Jakes原始模型的一些缺陷在文献[2]中得到了详细的叙述和讨论, 同时提出了改进方法, 诸如通过改进得到了广义平稳性能的信道模型, 但是高阶统计特性仍不理想, 文献[3]中也对其高阶统计特性做了分析, 主要是同相和正交分量的自相关与理想值相差较大。为此文献[6]提出了一种新的瑞利衰落信道的参数计算方法, 即引入随机的信号到达角, 使得生成的

多普勒频率为随机变量, 从而保证了信道模型同相正交分量互不相关, 但是自相关特性仍不理想。文献[9]则提出了一种通用的瑞利衰落波形的产生方法, 但是模型的计算量和复杂度较高。

本文提出了一种新的信道参数计算方法, 从实际仿真角度来说具有模型简单且容易实现特点, 对于仿真多个互不相关的瑞利衰落波形具有一定的优势。

### 1 瑞利衰落参考模型

由于瑞利衰落是基于二维平面内, 接收端信号呈各向同性散射, 所以信道参考模型表达式为:

$$c(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} E_0 \sum_{n=1}^N c_n e^{j(2\pi v_{\max} t \cos \alpha_n + \varphi_n)} \quad (1)$$

其中,  $E_0$  是常数,  $c_n, \alpha_n$  和  $\varphi_n$  分别是第  $n$  个路径的增益、波束到达角度和初始相位。

若假设  $\sum_{n=1}^N E\{c_n^2\} = 1$  且  $E_0 = \sqrt{2\sigma_0^2}$ , 信道参考模型的均值和相关统计特性为[2]:

$$\left. \begin{aligned} E\{c(t)\} &= 0, \\ R_{c_i c_i}(\Delta t) &= \sigma_0^2 J_0(2\pi v_{\max} \Delta t), i=1, 2, \\ R_{c_1 c_2}(\Delta t) &= R_{c_2 c_1}(\Delta t) = 0, \\ R_{cc}(\Delta t) &= 2\sigma_0^2 J_0(2\pi v_{\max} \Delta t), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中,  $J_0(\bullet)$  是第一类零阶Bessel函数。

## 2 多个不相关瑞利衰落模型

以仿真产生  $K$  个不相关瑞利衰落波形为例, 其表达式为:

$$\tilde{c}^{(k)}(t) = \left| \tilde{u}_1^{(k)}(t) + j\tilde{u}_2^{(k)}(t) \right|, k=1, 2, \dots, K \quad (3)$$

式中  $\tilde{u}_i(t), i=1, 2$  即为确定性高斯随机过程, 对其仿真采用正弦和理论, 表达式如下:

$$\tilde{u}_i^{(k)}(t) = \frac{2}{\sqrt{N_i}} \sum_{n=1}^{N_i} \cos(2\pi f_{i,n}^{(k)} t + \varphi_{i,n}^{(k)}), i=1, 2 \quad (4)$$

式中,  $N_i$  即为采用的正弦波数,  $f_{i,n}^{(k)}, \varphi_{i,n}^{(k)}$  分别称为第  $k$  个衰落波形的多普勒频率和多普勒相位, 且多普勒相位为均匀分布于  $(0, 2\pi]$  内的随机变量。对于一组确定的  $\{f_{i,n}^{(k)}\}$  和  $\{\varphi_{i,n}^{(k)}\}$  集合, 模型自相关可以表述为:

$$r_{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}^{(k)}(\tau) = \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} \cos(2\pi f_{i,n}^{(k)} \tau), i=1, 2 \quad (5)$$

式中,  $\sim$  代表确定性过程。那么我们所要解决的就是要寻找一组最佳多普勒频率的组合使其能够向参考自相关逼近, 即:

$$r_{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}^{(k)}(\tau) \rightarrow r_{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}(\tau) \quad \forall \tau \in [0, \tau_{\max}] \quad (6)$$

式中,  $k=1, 2, \dots, K$ ,  $\tau_{\max}$  为仿真中所关注的区域。

对于互相过函数, 因为要仿真多个互不相关衰落波形, 且单个波形内部的同相正交分量同样要求不相关, 所以表达式可以概括如下:

$$\left. \begin{aligned} r_{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}^{(k,l)}(\tau) &= 0 \quad \forall \tau, i \neq j \\ r_{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}^{(k,l)}(\tau) &= 0 \quad \forall \tau, k \neq l \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中  $i, j=1, 2, k, l=1, 2, \dots, K$ 。

## 3 模型参数计算方法

目前对平坦衰落仿真信道参数模型的计算方法有很多, 比如等面积法(MEA)、等距法(MED)、最小均方误差法(MESM)、蒙特卡罗法(MCM)、原始精确多普勒扩展法(MEDS)等, 其中从实现复杂度、计算精度和计算量等方面综合考虑, 原始精确多普勒扩展法较为突出, 其自相关特性与理论模型在低频振荡器数目小于10的情况下仍能很好逼近, 所以本文主要对精确多普勒扩展法进行探讨和研究。

现列出文献[8]中原始精确多普勒扩展法和文献[9]中提出的通用精确多普勒扩展法。将文献[8]中的参数计算方法称为方法1, 文献[9]中提出方法为方法2, 本文提出的方法为方法3。

方法1:

此方法即为原始精确多普勒扩展法, 它是专门为经常使用 Jakes 功率谱密度而开发的。除了它的简单性, 这个方法的显著优点就是它的高性能和能得到与 Jakes 功率谱密度相应的自相关函数的准最优近似。由此法所得到的多普勒频率表达式为:

$$f_{i,n} = f_{\max} \sin\left[\frac{\pi}{2N_i} \left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (8)$$

模型表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{c}(t) &= \tilde{u}_1(t) + j\tilde{u}_2(t), \\ \tilde{u}_1(t) &= \frac{1}{N_1} \sum_{n=1}^{N_1} \cos(2\pi f_{i,n} t + \varphi_n), \\ \tilde{u}_2(t) &= \frac{1}{N_2} \sum_{n=1}^{N_2} \sin(2\pi f_{i,n} t + \varphi'_n). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中,  $n=1, 2, \dots, N$ ; 只要  $N_1 \neq N_2$  即可满足同相和正交分量的多普勒频率交集为空,  $\varphi_n, \varphi'_n$  为独立同分布于  $[-\pi, \pi)$  之间的随机变量。

可以看出一旦  $N$  和最大多普勒频率确定后则所得到的仿真多普勒为固定值, 即多普勒频率到达角不满足随机特性, 不可以仿真多个互不相关的瑞利衰落波形, 那么文献[9]就提出了下面的改进。

方法2:

此法为通用精确多普勒扩展法, 模型表达式与式(9)相同, 多普勒频率表达式变化为:

$$f_{i,n} = f_{\max} \sin(\alpha_n) \quad (10)$$

其中， $\alpha_n = \frac{q\pi}{2N_1}(n - \frac{1}{2}) + \alpha_{i,0}$ ， $n = 1, 2, \dots, N$ ；

$N_1 = N_2$ ， $\phi_n, \phi'_n$  为独立同分布于  $[-\pi, \pi)$  之间的随机变量。

其中  $q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ， $\alpha_{i,0}$  为初始旋转角度，根据它不同的设置可以得到以下几种特例：精确多普勒扩展法 (MEDS)、随机精确多普勒扩展法 (R\_MEDS)、等面积法 (MEA) 以及蒙特卡罗法 (MCM)。

文献[9]中，分别选取了  $q = 1, 2$  作为产生多个互不相关的瑞利衰落波形的新方法，取名为  $GMEDS_1, GMEDS_2$ 。并且同时指出此两种方法均取为原始精确多普勒扩展法 (MEDS) 时得到最好的自相关逼近效果。即：

$$q = 1; \alpha_{i,0} = 0; \tag{11}$$

$$q = 2; \alpha_{i,0} = \pm \pi / 4N_i; \tag{12}$$

但是由于原始精确多普勒扩展法 (MEDS) 不能直接用于仿真多个不相关瑞利衰落波形，所以文献[9]提出的  $GMEDS_1$  仿真多个不相关瑞利衰落法为：

$$\alpha_{i,0}^{(k)} := (-1)^{i-1} \frac{\pi}{4N_i} \cdot \frac{k}{K} \tag{13}$$

式中， $k = 1, 2, \dots, K$  表示  $K$  个衰落波形， $i = 1, 2$ ，使  $N_1 = N_2$ ，只要满足  $\alpha_{i,0}^k \neq \alpha'_{j,0}$  即可以保证可获得多个不相关衰落波形。

文献[9]提出的  $GMEDS_2$  仿真多个不相关瑞利衰落法为：

$$\alpha_{i,0}^{(k)} := \frac{\pi}{4N_i} \cdot \frac{k-1}{K-1} \tag{14}$$

式中， $k = 1, 2, \dots, K$  表示  $K$  个衰落波形， $i = 1, 2$ ，只要  $N_1 = N_2 + 1$  即可以仿真出多个互不相关的瑞利衰落波形。

对于上述两种方法仿真多个互不相关的瑞利衰落波形， $GMEDS_1$  较  $GMEDS_2$  具有结构较简单的优点，但是对于初始旋转角的旋转有一定要求，而  $GMEDS_2$  法则对于任意的初始旋转角其同相（正交）分量的自相关性能均比  $GMEDS_1$  更加逼近参考模型，但模型复杂度为原始MEDS的两倍。

方法3：

为此本文同样基于原始精确多普勒扩展法提出了一种新的多普勒系数参数计算方法，在实际的信道仿真中易于实现且对多个独立瑞利波形仿真时具有模型复杂度较小的优势。信道模型与式(9)相同，只是将多普勒频率的计算表达式变化为：

$$f_{i,n} = f_{\max} \sin(\alpha_n) + \phi_n \tag{15}$$

$$\alpha_n = \frac{2\pi n - \pi}{4N} \tag{16}$$

$n = 1, 2, \dots, N$ ； $N_1 = N_2$ ； $\phi_n$  为  $[a, b]$   $a, b \in R$  之间的随机变量。

原理：因为在多普勒系数为确定值的情况下，要对自相关值进行逼近，也就是寻找一组最优多普勒系数解，在对平坦衰落信道进行仿真时，多普勒功率谱为Jakes谱，信号频率范围被限定在  $\pm f_{\max}$  范围内，所以也就是在此范围寻找仿真自相关与理论自相关最逼近的数值解，虽然方法2提出了两种通用的精确多普勒扩展法能够较好的仿真多个互不相关的瑞利衰落波形，但是相对模型的复杂度较高。而方法3在原始精确多普勒扩展方法得到的频率基础上加上随机抖动，便使得多普勒频率成为随机值，进而可以保证同相与正交分量的不相关；对于仿真多个独立瑞利衰落波形，此方法则更加适合，因为不需要每次都产生  $N$  个随机变量，只需产生一组随机变量，那么就会有  $M$  种随机抖动的排列组合，所以每次按不同次序挑选抖动值并加到相应的频率点上即可实现不相干的多个瑞利衰落波形。抖动的范围可以自行设定，以下为仿真结果图：

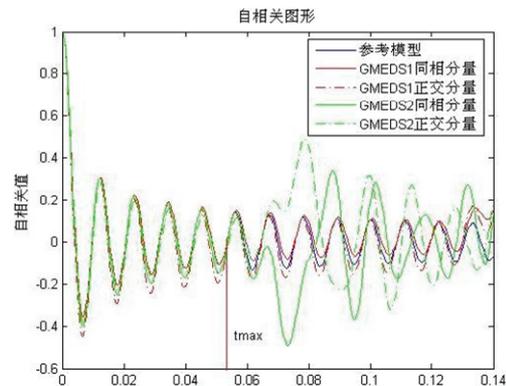


Figure 1. Method 2-phase and quadrature components of the autocorrelation function graph

图1. 方法2同相和正交分量自相关函数图形

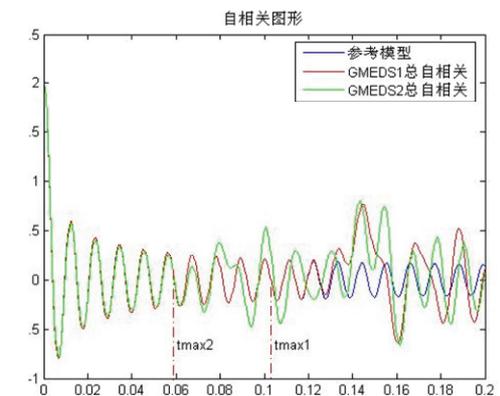


Figure 2 Method 2 the total autocorrelation function graph

图2. 方法2总自相关函数图形

图(1) (2)中  $GMEDS_1: N = 20, f_{max} = 91, \sigma_0^2 = 1, K = 3$ ,  $GMEDS_2: N_1 = 20, N_2 = 21, f_{max} = 91, \sigma_0^2 = 1, K = 3$ 。

从图(1)可以看出方法2所得到的自相关函数与参考自相关的比较, 在  $\tau_{max}$  仿真时间内,  $GMEDS_2$  法的同相和正交分量自相关几乎与参考模型一致, 而由  $GMEDS_1$  的自相关图形可以看出, 同相和正交分量的自相关始终偏离参考自相关。

图(2)可以看出虽然  $GMEDS_1$  的总自相关在我们所关心的  $\tau_{max1}$  时间内与参考自相关几乎一致, 可见同相正交分量相互抵消了误差分量;  $GMEDS_2$  的总自相关在  $\tau_{max2}$  时间内与参考自相关几乎一致。

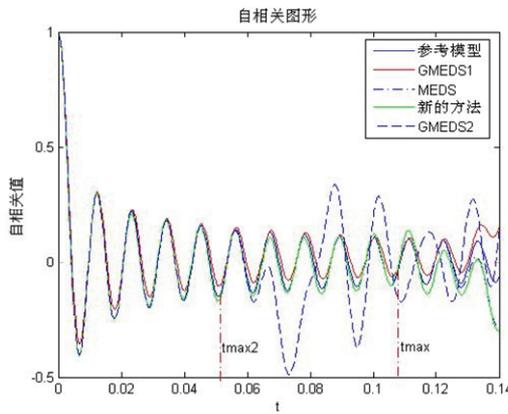


Figure 3 Comparison of in-phase autocorrelation function graph  
图3. 同相自相关函数比较图形

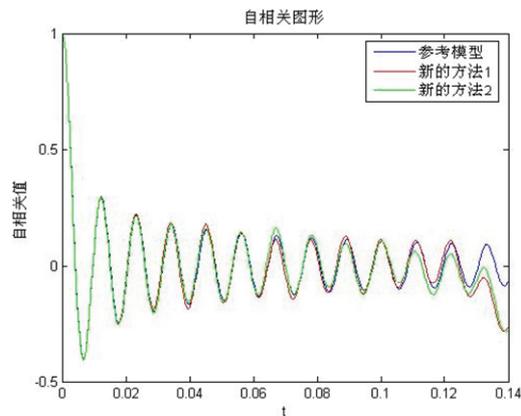


Figure 4 Method 3 the autocorrelation function graph  
图4. 方法3自相关函数图形

图(3) (4)中随机抖动最大幅度为 1,  $N = 20, f_{max} = 91, \sigma_0^2 = 1$ 。

从图(3)中可看出, 改进的方法3在随机抖动幅度为 1 时, 其自相关在  $\tau_{max1}$  时间内性能明显优于

$GMEDS_1$ , 基本上与理论参考模型一致; 从图(4)中可以看出, 在与图(3)其他条件相同的情况下, 方法3两次自相关的实现曲线明显不同, 不相关条件得到满足。

图(5)(6)中  $N = 20, f_{max} = 91, \sigma_0^2 = 1$ , 随机抖动最大幅度均为 1。图(5)(6)中所示为方法3所仿真出的两条相互独立的瑞利衰落波形, 证明本文提出的方法切实可行有效。

综上, 本文提出的新的方法3在保证自相关统计特性较好的情况下, 改善了方法1 (原始精确多普勒扩展

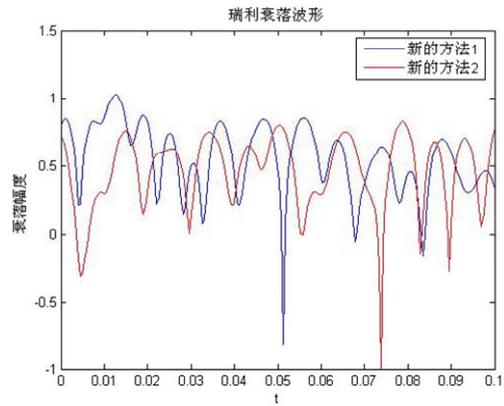


Figure 5 Simulation of Rayleigh wave  
图5. 瑞利仿真波形

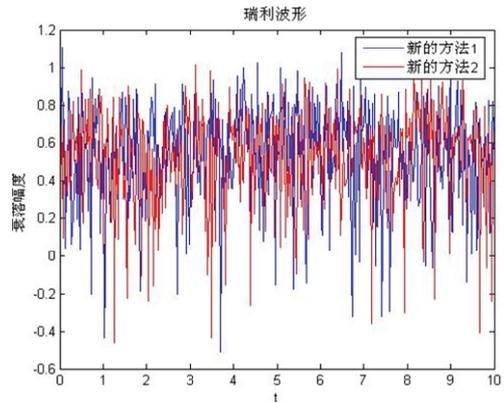


Figure 6 Simulation of Rayleigh wave  
图6. 瑞利仿真波形

法) 的随机多普勒频率问题, 可有效仿真多个独立瑞利衰落波形; 与文献[17]中的方法 (通用精确多普勒扩展法) 相比同相 (正交) 自相关性能优于  $GMEDS_1$  法; 在模型的复杂度仅为  $GMEDS_2$  法的一半的情况下, 就可以很好的仿真多个互不相关的瑞利衰落波形。

#### 4 总结

本文提出一种新的基于原始精确多普勒扩展法的

参数计算方法, 不论从自相关统计特性还是模型复杂度方面均要优于原始精确多普勒扩展法和通用精确多普勒扩展法, 并且所提出的随机频率抖动可以设定波动范围, 仿真结果表明此方法可以同时确保多普勒频率为随机变量的同时, 其自相关特性没有受到较大影响, 在低频振荡器为8个时仍可以很好的描述瑞利衰落信道, 并且可以很好的用于频率选择性信道和MIMO信道的仿真。

## References (参考文献)

- [1] JAKES.W.C, Microwave mobile communication [M] New York: Wiley-Interscience, 1974
- [2] POP.M.F, BEAULIEU.N.C, Limitations of sum-of-sinusoids fading channel simulators [J] IEEETrans. Commun, 2001, 149 (4): 699–708.
- [3] XIAO.C, ZHENG.Y.R, BEAULIEU N C. Second order statistical properties of the WSS Jakes' fading channel simulator [J]. IEEE Trans Commun, 2002, 50(6): 888–891.
- [4] DENT. P, BOTTOMLEY. G. E, CROFT. T, Jakes fading model revisited[J]. Electron Letter, 1993, 29(13):1162–1163.
- [5] LI.Y.B, GUAN.Y.L, Modified Jakes model for simulating multiple uncorrelated fading waveforms[C]. New Orleans: IEEE ICC'00, 2000.
- [6] ZHENG.Y.R, XIAO.C, Improved models for generation of multiple uncorrelated Rayleigh fading waveforms[J]. IEEE-E Commun Letter, 2002, 6 (6): 256–258.
- [7] PATZOLD.M, LAU.E.F, Statistical properties of Jakes' fading channel simulator[C]. Ottawa: IEEE VTC'98, 1998.
- [8] M. Patzold, Mobile Fading Channels. Chichester: John Wiley & Sons, 2002
- [9] M. Patzold, B. Olav. Hogstad, Two New Methods for the Generation of Multiple Uncorrelated Rayleigh Fading Waveforms [J] IEEE Trans.Veh.Technol.,vol.9, 2006, 2782–2786.