Study on the Solving Ambiguity Algorithm of Multi-Baseline Interferometer

Xian'gang ZUO, Zhisong HOU, Zhou YU
School of Information Engineering, Henan Institute of Science and Technology, Xinxiang, China
Email: zuoxg2002@163.com

Abstract: For the problem of multi-baseline interferometer in wideband direction finding, an improved algorithm of solving multi-baseline interferometer phase difference ambiguity is studied. The algorithm selects baseline length satisfied stagger qualification; thereby the maximum unambiguous direction could be enlarged greatly, solving conflict between accuracy of direction finding and maximum unambiguous angle. The correctness of theoretic analysis is effectively demonstrated by computer simulation.

Keywords: multi-baseline interferometer; passive location; solving ambiguity; SNR

多基线相位干涉仪解模糊算法研究

左现刚，侯志松，余　周
河南科技学院，信息工程学院，新乡，中国，453003
Email: zuoxg2002@163.com

摘　要：针对多基线相位干涉仪在宽带测向时存在的问题，该文提出了一种新的相位差解模糊算法，该方法选择基线长度满足一定的参差关系，从而大大增加了最大无模糊角度，解决了测向精度与最大不模糊角度之间的矛盾。仿真结果表明了理论分析的正确性。

关键词：多基线相位干涉仪；无源定位；解模糊；信噪比

1 引言

多基线相位干涉仪由于其高的测向精度，在高精度单站无源定位与跟踪中有着十分重要的意义。单基线相位干涉仪存在着测向精度和最大无模糊角度之间的矛盾。为了解决这一矛盾，通常采用多基线体制，仿照多频连续波测距雷达技术，基线长度按照一定的参差关系选择，这样可以提高干涉仪的测向性能。

基线长度对定位的精度有一定的影响，基线长度越大，定位精度越高，但当基线长度超过来波信号波长的一半时，所产生的相位差数据就有可能超出 $(-\pi,\pi]$ 的范围，也即可能出现相位差的模糊现象。因而为了保证一定的定位精度，我们必须对相位干涉仪所测相位差数据出现的模糊问题予以解决。

2 问题的数学模型

假设一维 M 基线相位干涉仪如图 1 所示[1]，其基线长度分别为 l_i（i=1,2，…，M），波长为 λ 的信号由与天线视轴夹角为 θ 的方向传播而来。

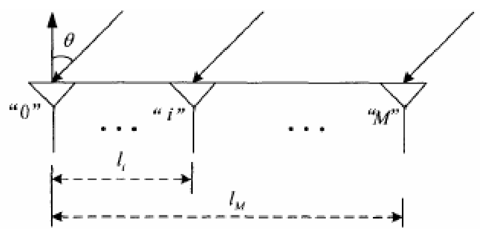

Figure 1. The sketch map of the principle of the Multi-baseline Interferometer
图 1. M 基线相位干涉仪原理示意图

基线 l_i 对应的模糊相位差 ϕ_i 为

$$\phi_i = (2\pi l_i \sin\theta/\lambda) \bmod 2\pi,\quad i=1,\cdots,M \tag{1}$$

令 k_i 表示用基线测向时的模糊整数，将上式转换成信号入射角正弦的形式为

$$\sin\theta = k_i\lambda/l_i + \lambda\phi_i/(2\pi l_i),\quad i=1,\cdots,M \tag{2}$$

现取一基本基线长度 l_0，并令 $l_i = l_0/m_i$（m_i 为参差比）,代入式（2）得

$$\frac{\sin\theta}{\lambda/l_0} = k_i m_i + \frac{\phi_i}{2\pi}m_i,\quad i=1,\cdots,M \tag{3}$$

令 $\lambda / l_0 = P$，$\sin\theta / P = L$，$r_i = \phi_i m_i / (2\pi)$，则式（3）可以表示为

$$L = k_i m_i + r_i,\ i = 1,\cdots,M \tag{4}$$

这里 r_i 是归一化的模糊相位差，且有 $0 \le r_i < m_i$。现在的问题转化为根据已知的 r_i 如何求解 k_i，从而求出真实的信号入射角 θ[1]。

为了求解方程组(4)，先写出数论中的剩余数定理（孙子定理）[3]：

设 $m_i (i = 1,\cdots,k)$ 为正整数且两两互素，记 $m = m_1 m_2 \cdots m_k$，$M_i = m / m_i (1 \le i \le k)$，则存在整数 $M_i^{'} (1 \le i \le k)$，使 $M_i M_i^{'} = 1 (\bmod m_i)$ 且 $M_i M_i^{'} = 0 (\bmod m_j), 1 \le j \le k, i \ne j$，并且 $x_0 = \sum_{i=1}^{k} a_i M_i M_i^{'} (\bmod m)$ 是同余方程组(5)对模 m 的唯一解。即若有 x 使方程组(5)成立，则 $x = x_0 (\bmod m)$。

$$\left.\begin{aligned} x &= k_1 m_1 + a_1 \\ x &= k_2 m_2 + a_2 \\ &\vdots \\ x &= k_M m_M + a_k \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在理想的无噪扰情况下，式(4)为一个除数为整数的实数域内的同余方程组。如果选择 $m_i (i = 1,\cdots,M)$ 为正整数且两两互素，适当选择 r_i 使其取为整数[4]，则根据剩余数定理，式(4)在由 $m = m_1 m_2 \cdots m_k$ 所决定的最大无模糊角度范围内有唯一解。此时的最大无模糊角度为

$$\theta_{unamb} = \arcsin(P m_1 m_2 \cdots m_M) \tag{6}$$

对比式(2)和式(6)可以看出，采取多基线干涉仪测向时最大无模糊角度增加，解模糊能力增强，较好的解决了定位精度和测量模糊之间的矛盾，同时解决了增大最大无模糊角度与测量模糊之间的矛盾。

在实际中需要考虑噪声扰动的影响，一般地相位测量误差会导致上述数学模型同余方程组无解。为此需要建立噪扰条件下的数学模型[1]。

假设由于噪扰而在真实模糊相位差 ϕ_i 上产生了大小为 $\Delta\phi_i$ 的误差（$i = 1,2,\cdots,M$），令归一化噪扰 $q_i = \Delta\phi_i m_i / (2\pi)$，则在一般情况下，$k_i m_i + r_i + q_i \ne k_j m_j + r_j + q_j$。因此式(4)可改写为

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= k_1 m_1 + r_1 + q_1 \\ L_2 &= k_2 m_2 + r_2 + q_2 \\ &\vdots \\ L_M &= k_M m_M + r_M + q_M \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

需要特别说明的是，此时参次比 $m_i (i = 1,\cdots,M)$ 可以不满足两两互素的要求。

式(7)求解的准则为：求（k_1,⋯，k_M）使得

$$W \to \min, \text{其中 } W = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^{M} |L_i - L_j| \tag{8}$$

解模糊后，可求出 L_i 和真实相位差 $\Phi_i = \phi_i + 2k_i\pi$（$i = 1,2,\cdots,M$），此时，可以采用多种方法求解信号入射角，以下给出平均值算法和最小二乘算法。

平均值算法就是通过计算 L_i 的均值进而计算出信号入射角，其计算公式为：

$$\hat{\theta} = \arcsin\left(\frac{P}{M} \sum_{i=1}^{M} L_i\right) \tag{9}$$

最小二乘算法的计算公式为：

$$\hat{\theta} = \arcsin\left[\frac{P}{2\pi} \sum_{i=1}^{M} (\Phi_i / m_i) / \sum_{i=1}^{M} (1/m_i^2)\right] \tag{10}$$

3 噪扰条件下正确解模糊的条件

3.1 正确解模糊对噪扰和基线参次比的要求

定理 1：如果限定噪扰的程度在 $|q_i| \le q_{\max}$ 以内，则当且仅当 $m_i = \lceil 4q_{\max} \rceil \cdot p_i$（$p_i$ 两两互素，$\lceil (*) \rceil$ 是大于(*)的最小正整数)时，我们可以对参差多基线干涉仪正确解模糊并且保证 $\Delta\phi_i$ 的取值范围尽可能大。

为了证明定理 1，先给出数论中两个重要引理。

引理 A：给定整数 p_1、p_2，存在整数 K_1、K_2，使得 $K_1 p_1 - K_2 p_2 = GCD(p_1, p_2)$ 有解，其中 $GCD(p_1, p_2)$ 是 p_1、p_2 的最大公约数。

引理 B：当且仅当 GCD(F_1, F_2)能整除 K，方程 $K_1 F_1 - K_2 F_2 = k$ 有解。

证明：参照文献[1, 5]给出证明如下：

对于正确的系数解，我们记作 k_i；反之，我们记作 $\bar{k}_i$。为分析问题简单清楚起见，不妨先设 M=2。

先证充分性。

易知，当 $m_i = \lceil 4q_{\max} \rceil \cdot p_i$ 时，根据引理 B，$k_i m_i - k_j m_j = \lceil 4q_{\max} \rceil$ 在范围 $0<k_1 < p_2$、$0<k_2 < p_1$ 之内有解。综合引理 A、B 知此时总有 $|k_i m_i - k_j m_j|_{\min} = \lceil 4q_{\max} \rceil$ 成立。从而有 $|(\bar{k}_1 - k_1) m_1 - (\bar{k}_2 - k_2) m_2|_{\min} = \lceil 4q_{\max} \rceil$（这一点可把 $(\bar{k}_i - k_i)$ 看作一个整数，通过分别讨论其正负而得到)。r_i 所对应的噪扰假设为 q_i，则可知 $|(q_1 + q_2) + (\bar{k}_1 - k_1) m_1 - (\bar{k}_2 - k_2) m_2| > 2q_{\max}$，又因为 $k_1 m_1 - k_2 m_2 = r_2 - r_1$，所以有

$|(\bar{k}_1 m_1 + r_1 + q_1) - (\bar{k}_2 m_2 + r_2 + q_2| > 2q_{\max}$，$|(k_1 m_1 + r_1 + q_1) - (k_2 m_2 + r_2 + q_2| < 2q_{\max}$ 成立。也就是说，此时能够对式(11)正确解模糊。

再证必要性。

为了能够对式(11)正确解模糊，应该有 $|(\bar{k}_1 m_1 + r_1 + q_1) - (\bar{k}_2 m_2 + r_2 + q_2)| > 2q_{\max}$ 成立。也即应有 $|(\bar{k}_1 m_1 + r_1 + q_1) - (\bar{k}_2 m_2 + r_2 + q_2)| > 2q_{\max}$ 成立。又因 $|q_i| \le q_{\max}$，所以 $|(\bar{k}_1 - k_1)m_1 - (\bar{k}_2 - k_2)m_2| > 4q_{\max}$ 成立。注意到 $\bar{k}_i, k_i$ 的取值区间，可知应有 $|k_1 m_1 - k_2 m_2|_{\min} = H(H \ge \lceil 4q_{\max} \rceil)$ 成立。也即 $k_1 m_1 - k_2 m_2 = H$ 有解而且对于任意 M＜H，方程 $k_1 m_1 - k_2 m_2 = M$ 无解。根据引理 B，$GCD(m_1, m_2)$ 能够整除 H，但不能整除 M。从而我们得到 $GCD(m_1, m_2)$=H。但是注意到 $\Delta\phi_i \le (2\pi q_{\max})/(m_i)_{\max}$，为了保证$|\Delta\phi_i|$的取值范围尽可能大，应该取 H=$\lceil 4q_{\max} \rceil$。

至此，证明了在 M=2 情况下定理 1 的正确性。参照文献[1, 2]可以将该结论推广到任意 M 值的情况。

若干涉仪的基线长度满足一定的参差关系，定理 1 给出了此时正确解模糊所允许的最大噪扰。

3.2 正确解模糊对信号入射角的要求

定理 1 阐述了纯数学意义上正确解模糊的条件。在无噪扰情况下，当信号入射角超过式(6)的范围时，虽然能够解出定理 1 规定的纯数学意义上的正确模糊系数，但这时由于上述数学模型没有能力确定真实的信号入射角，因此此时的正确解模糊已经失去了实际意义，我们可以认为仍然不能正确解模糊。当考虑噪扰时，有相同的问题，即当信号入射角超过上述数学模型所能解决的范围时，无法确定真实的信号入射角，我们可以认为此时不能正确解模糊。

为了能够解出具有实际意义的模糊系数，我们可以推导出对信号入射角的要求，如定理 2[1]。

定理 2：令 $m_i = F \cdot p_i, F = \lceil 4q_{\max} \rceil$，则当 $\Delta\phi_i$ 分布在 $[-(2\pi q_{\max})/(m_i)_{\max}, (2\pi q_{\max})/(m_i)_{\max}]$ 区间内时，为了能正确解模糊，信号入射角的正弦 $\sin\theta$ 应该限制在区间 $\left[q_{\max} P, (F \cdot \prod_{i=1}^{M} p_i - q_{\max})P\right]$ 内。

证明：我们定义归一化噪扰 $q_i = \Delta\phi_i m_i / (2\pi)$，因此，当 $\Delta\phi_i$ 分布在 $[-(2\pi q_{\max})/(m_i)_{\max}, (2\pi q_{\max})/(m_i)_{\max}]$ 区间内时 q_i 分布在 $[-q_{\max}, q_{\max}]$，根据定理 1 知此时能够保证在纯数学意义上正确解模糊。另一方面，当信号入射角的正弦 $\sin\theta$ 限制在区间 $\left[q_{\max} P, (F \cdot \prod_{i=1}^{M} p_i - q_{\max})P\right]$ 内时，方程组（7）中的 $L_i (i = 1, 2, \cdots, M)$ 被限制在区间 $\left[0, F \cdot \prod_{i=1}^{M} p_i\right]$ 内。而由文献[5]中的“引理 A”知同余方程组（7）有解时对模 $F \cdot \prod_{i=1}^{M} p_i$ 有唯一解(即其解集中每个解对 $F \cdot \prod_{i=1}^{M} p_i$ 的余数相同)。因此，只有当 $L_i (i = 1, 2, \cdots, M)$ 被限制在区间 $\left[0, F \cdot \prod_{i=1}^{M} p_i\right]$ 内时才能保证方程组(7)有唯一解，即解出的模糊系数和实际的模糊系数相同，从而得出具有实际意义的正确解模糊系数，证毕。

3.3 噪扰条件下正确解模糊对信噪比的要求

在信噪比为 SNR 时，单信道相位测量误差均方差为 $\sigma_\phi = 1/\sqrt{2SNR}$，由内部噪声引起的正交两个通道相位差误差均方差 $\sigma_{\phi 1}$ 为 σ_ϕ 的 $\sqrt{2}$ 倍，从而有

$$\sigma_{\phi 1} = 1/\sqrt{SNR} \tag{11}$$

假设相位差测量误差服从均值为 0 的高斯分布，则由概率论与数理统计知，测量误差 $\Delta\phi_i$ 以 99.74%的概率落入区间[-3$\sigma_{\phi 1}$，3$\sigma_{\phi 1}$]内，即

$$(\Delta\phi_i)_{\max} \ge 3\sigma_{\phi 1} \text{（以 99.74\%的概率，下同）} \tag{12}$$

将式(10)、(11)代入式(12)得

$SNR \ge \left[9(m_i)_{\max}^2 / (4\pi^2 q_{\max}^2)\right]$，即 $SNR_{lowest} = \left[9(m_i)_{\max}^2 / (4\pi^2 q_{\max}^2)\right]$

证毕。

上式即为噪扰条件下多基线干涉仪正确解模糊对最低信噪比的要求。同理可推导出其他不同正确解模糊概率时所需的最低信噪比。

4 仿真验证

4.1 仿真验证定理 1 的充分性和必要性

首先验证定理 1 的充分性。取 $q_{\max}$=0.7499，则 $\lceil 4q_{\max} \rceil$=3。$m_1 = 6, m_2 = 9, r_1 = 4, r_2 = 1$，令 q_1、q_2 在区间[-s , s]内均匀随机、独立地取值。此时正确的模糊整数为 k_1^*=1，k_2^*=1。根据定理 1，在 $0 \le s \le 0.7499$ 时，我们一定能够正确解模糊；当 s≥0.75 时，正确解模糊的概率会随着 s 的上升而下降。

在每个取定的 s 处进行 50000 次 Monte-Carlo 仿真实验，看正确解同余方程组的概率。实验结果如图 2。可以看出，s 在 0 至约 0.75 之间，正确解模糊的概率维持在 100%；s 从约 0.75 开始，正确解模糊的概率开始下降，仿真结果与按照定理 1 进行的理论分

析结果完全吻合。

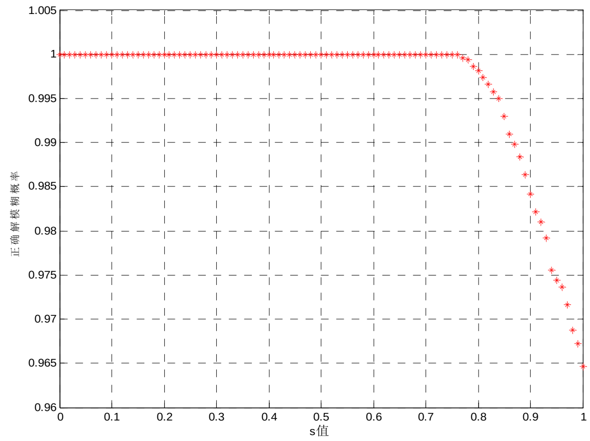

Figure 2. The sketch map of the confirmation about the sufficiency of the correct solving ambiguity

图 2. 正确解模糊条件的充分性验证示意图

其次验证定理 1 的必要性。取 $q_{\max}$ =0.9999，$m_1=2, m_2=3, r_1=1, r_2=2$，令 q_1、q_2 在区间 [-s , s]内均匀随机、独立地取值。此时正确的模糊整数为 k_1^*=2，k_2^*=1。根据定理 1，在 0≤ s ≤0.9999 时，我们不能够保证对同余方程组正确解模糊；能够保证正确解模糊的范围是 0≤ s ≤0.2499。

在每个取定的 s 处进行 50000 次 Monte-Carlo 仿真实验，正确解同余方程组的概率随 s 变化的结果如图 3。可以看出，s 在 0 至约 0.25 之间，正确解模糊的概率维持在 100%；s 从约 0.25 开始，正确解模糊的概率开始下降，仿真结果与按照定理 1 进行的理论分析结果完全吻合。

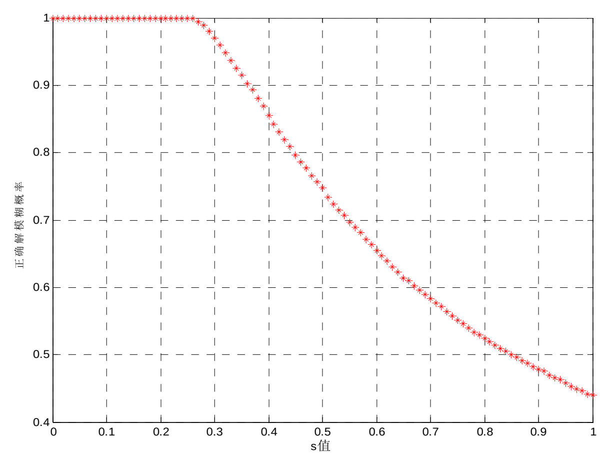

Figure 3. The sketch map of the confirmation about the necessity of the correct solving ambiguity

图3. 正确解模糊条件的必要性验证示意图

4.2 仿真验证定理 2

参照文献[1]取 l_0 =3m，p_i =3,5，$q_{\max}$ =0.2499，波长 λ =15cm，则 P= λ / l_0 =0.05。此时根据定理 2，能够正确解模糊的目标方位角的正弦范围为 $\sin\theta \in$ [0.0125,0.7375]；当 $\sin\theta \notin$ [0.0125,0.7375]时，不能保证正确解模糊。进行 5000 次 Monte-Carlo 计算机仿真实验，仿真结果见图 4。

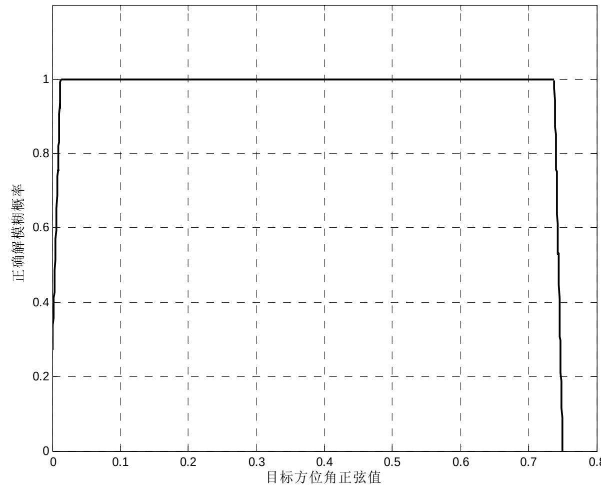

Figure 4. The sketch map of the confirmation about the angle of the correct solving ambiguity

图 4. 正确解模糊角度范围验证示意图

由图 4 可以看出，信号入射角的正弦大约位于[0.0125,0.7375]之内时，我们可以正确解模糊，当角度的正弦处于[0,0.0125）和(0.7375,0.75]范围内时，均不能保证 100%正确解模糊。从而验证了由定理 2 给出的正确解模糊角度范围的正确性。

4.3 仿真验证正确解模糊所需的最低信噪比

取 $m_1=4, m_2=6, r_1=1, r_2=3$, 此时正确的模糊整数为 k_1^*=2，k_2^*=1。则根据命题 4.3 可计算出正确解模糊的概率为 99.74%时所需的最低信噪比为 SNR_{lowest} =32.8dB，即当 SNR <32.8dB 时，正确解模糊的概率较低（均小于 99.74%）；当 SNR >32.8dB 时，正确解模糊的概率较高（均大于 99.74%）。

根据以上的理论指导，可设 q_i 服从均方根为 $\sigma_q = m_{i\max} / (2\pi\sqrt{SNR})$ 的白噪声。针对不同的信噪比，求出相应的 σ_q，并令 q_1、q_2 在区间[-3q_i ,3q_i]内均匀随机、独立地取值。对每个取定的信噪比处进行 50000 次 Monte-Carlo 仿真实验，正确解同余方程组的概率随信噪比变化的曲线如图 5。

由图 5 可以看出，在信噪比为 32.8dB 附近，正确

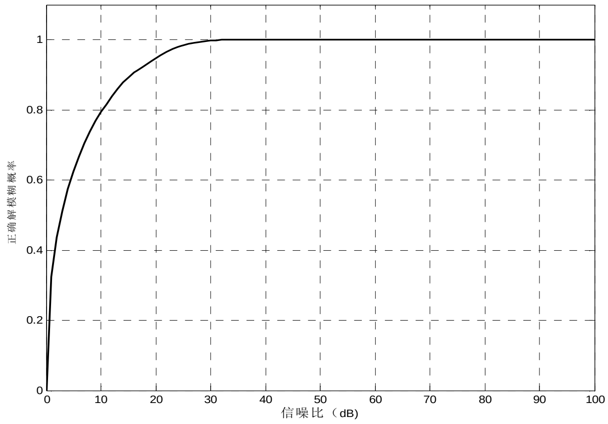

Figure 5. The sketch map of the relations about the correct solving ambiguity probability and the SNR
图 5. 正确解模糊概率与信噪比关系示意图

解模糊概率有一个明显的转折点，当信噪比在大于转折点的范围内时，能够正确解模糊的概率约为100%，当信噪比在小于转折点的范围内时，随着信噪比 SNR 的降低，求解错误的概率大大增加。仿真结果与基线长度按照定理 1 配置的参差多基线干涉仪进行的理论分析结论完全吻合。

5 结束语

本文就多基线干涉仪测向和解模糊中的一些关键问题进行了研究，给出了理论结论。首先对相位差测量值出现模糊的原因进行了分析。然后分析了噪扰条件下正确解模糊的条件，并给出了正确解模糊所需的最低信噪比，并进行了计算机仿真实验。其结果验证了所给结论的正确性，为以后的深入研究提供了重要基础。

References (参考文献)

[1] ZHOU Yaqiang, Single Observer Passive Location and Tracking Arithmetic UsingLook-Acceleration of Changing Information. Do-ctorate paper, Nat. Univ. of Defense Tech., 2005(Ch).
周亚强，基于视在加速度信息的单站无源定位与跟踪关键技术研究及其试验，博士学位论文，国防科学技术大学，2005.

[2] William S C, James B Y, Venon L B.A Noise Insensitive Solu-tion to an Ambiguity Problem in Spectral Estimation[J].IEEE Trans. on AES, 1989, 25(5):729–731.

[3] YU Xiuyuan, QU Weijian, Primary theory of numbers[M], JI Nan: Shan dong education publishing house, 2004(Ch).
于秀源,瞿维建,初等数论,济南:山东教育出版社，2004.

[4] HUANG Zhenxing, WAN Zheng. Simultaneous Ambiguity Reso-lution on Noisy Range and Velocity Data via CRT Algo-rithm[J]. Acta Electronica Sinica.1992, 20(9): 27–33(Ch).
黄振兴，万征，距离-速度噪扰模糊数据同时分辨的孙子定理算法，电子学报，1992, 20(9): 27–33.

[5] XU Bangjian, Study on the key theory, algorithm of multi-fre-quen-cy continuous wave distance-measuring radar, and the de-sign of software and hardware, Doctorate paper, Nat. Univ. of Defense Tech., 2001(Ch).
许邦建，多频连续波测距雷达关键理论、算法的研究及软硬件设计，博士学位论文，国防科学技术大学，2001.

978-1-935068-10-5 © 2010 SciRes.