

Research on M/M/1 Queuing System Simulation Based on Matlab

Wei HU, Xiaoping WU, Yanlin QIN, Wei LIAO

Department of Information Security, Naval Univ. of Engineering, Wuhan, China, 430033

E-mail: Huwei-1212@126.com

Abstract: To reappear one queue and one sever queuing system (M/M/1) running process, it researches on how to simulate the M/M/1 queuing system based on Matlab. First according to assume the customer, arrival model, serving rule, arriving time and serving time probability distributing in reason, the queuing system simulation model faced on event is established. Second the simulation main program frame of M/M/1 queuing system is designed based on the-next event driving method. Finally it gives the detailed data and results of simulation process depending on matlab software. The simulation program can better display the M/M/1 queuing system running process. It can also help to analyzing the queuing system in true-life phenomenon.

Keywords: M/M/1; queuing system; Matlab; computer simulation

基于 Matlab 的 M/M/1 排队系统仿真研究

胡 卫, 吴晓平, 秦艳琳, 廖 巍

海军工程大学信息安全系, 武汉, 中国, 430033

E-mail: Huwei-1212@126.com

摘 要: 为了真实地模拟再现单服务员单队列排队系统 (M/M/1) 的运行过程, 通过合理假设顾客源、到达模式、服务规则, 以及顾客到达时刻和服务时间的概率分布, 建立了面向事件的排队系统仿真模型, 通过下一事件时间推进法设计了 M/M/1 排队系统的仿真主程序框架, 然后借助 Matlab 工具进行了仿真实现, 记录了详细的仿真过程数据, 最后给出了排队系统的仿真结果。设计的仿真程序可以较好的模拟 M/M/1 排队系统的真实情况, 对于分析现实生活中的排队现象有很好的辅助效果。

关键词: M/M/1; 排队系统; Matlab; 计算机仿真

1 引言

排队现象在生活中无处不在, 如顾客在超市付款、病人在医院看病等等都要排队。此外, 像计算机网络中数据的存储转发、电话局的占线问题、交通枢纽的车船堵塞和疏导、水库的存储调节等等都是排队现象。

数学上, 研究排队系统的理论是经典随机服务系统理论, 即排队论, 源于 Erlang 关于电话的研究, 并在第二次世界大战后得到迅猛发展, 成为随机运筹学与概率论中最有活力的研究课题。它不仅建立了比较完备的理论体系, 而且在军事、生产、经济、管理、交通、通信、网络等领域得到了广泛的应用。

2 排队系统基本概念

资助信息: 国家“863”计划基金资助项目(2007AA12Z208); 中国博士后科研基金项目(20080431384)

排队系统一般由顾客源、排队结构和服务机构构成(参见图 1)。排队等待服务的对象, 如病人、机器等, 统称“顾客”, 而进行服务的主体, 如医生、维修工等, 统称“服务员”。

下面介绍排队系统的几个概念:

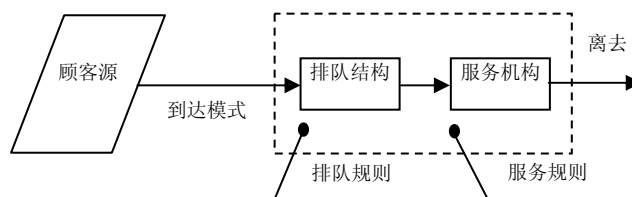


Figure 1. Queuing system component and description element
图 1. 排队系统组成及描述要素

(1) 到达模式

到达模式指动态实体按怎样的规律到达，描写实体到达的统计特性。按照顾客相继到达时间间隔可分为确定型和随机型；按照顾客到达系统的方式可以逐个或成批；按照顾客到达系统是独立的或相关的，输入过程可以是平稳、马氏、齐次的。

(2) 排队规则

排除规则指对下一实体服务选择的选择原则。通用的排队规则包括先到先服务，顾客按照到达次序接收服务；后到先服务，例如仓库中堆放的大件物品总是后进先出的；随机服务，当服务台空闲时，从等待的顾客中随机选取一名顾客进行服务；优先权服务，例如医院中急诊病人优先得到治疗；多个服务台，当顾客到达时，可以按照某种规则在每个服务台前排成一队。

(3) 服务机构

服务机构指同一时刻多少服务设备可以接纳动态实体。系统可以一个窗口或多个窗口为顾客进行服务；各窗口服务时间可以是确定型或随机型。若服务时间为随机型的，且假设顾客在系统内逗留的时间均值为 W_s 、顾客排队等候服务的时间均值为 W_q 、服务时间的均值为 t ，则它们之间的关系为： $W_s = W_q + t$ 。

(4) 性能指标

一般情况下，通过以下三个指标来评价排队系统的性能：

- 顾客在系统内的平均等待时间；
- 系统的平均队长；
- 服务利用率。

3 M/M/1 排队系统仿真模型

本文主要研究只有一个服务员和一个队列的情形，称为单服务员单队列排队系统，即 M/M/1 模型。根据仿真的研究对象不同，系统仿真可以分为连续系统仿真和离散事件系统仿真。离散事件系统仿真讨论的是系统状态只在一些离散时间点上，由于随机事件驱动而发生变化，其模型一般只能用流程图或网络图来表示。本文研究的 M/M/1 排队系统只有当顾客到达时刻才会发生服务，所以是典型的离散事件系统。

面向事件的仿真模型的总控程序使用事件表 (Event LIST) 来完成时间扫描、事件辨识和事件执行。在仿真运行中，事件的记录不断被列入或移出事件表。对于单队列单服务员排队系统有“顾客到达”和“顾客离开”两类事件，据此建立如下事件表 (如表 1 所示)。

Table 1. One queue and one sever queuing system event
表 1. 单队列单服务员系统事件表

事件类型	事件描述	事件属性
第一类	顾客到达系统	到达时刻
第二类	顾客离开系统	离去时刻

建立事件表后，面向事件仿真模型总控程序的算法有两步：

第一步：时间扫描

- (1) 扫描事件表，确定下一事件发生时间；
- (2) 推进仿真时钟至下一事件发生时间；
- (3) 从事件表中产生当前事件表，它包含了所有当前发生事件记录。

第二步：事件执行

面向事件仿真模型的执行机制如图 2 所示。

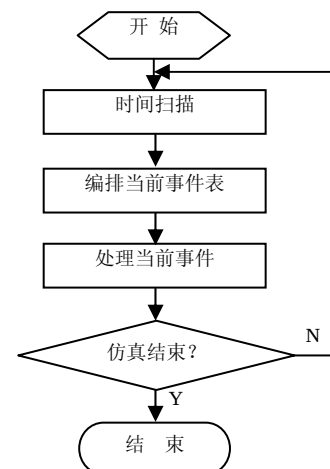


Figure 2. Implement mechanism faced on event system model
图 2. 面向事件仿真模型执行机制

M/M/1 排队系统的运行过程十分简单：当一位顾客到达系统时，若服务员空闲，则立即进入服务，服务完毕离开系统；若服务员正在工作，则排队等候，待正接受服务的顾客离开后再进入服务。所以作如下基本假设：

- (1) 顾客源是无穷的
- (2) 排队的长度没有限制
- (3) 顾客“先到先服务”

同时，假定两位顾客先后到达系统的时间间隔 (记作 i) 的概率分布为：

到达间隔 i (分)	(0,2]	(2,4]	>4
概率 P	0.4	0.5	0.1

假定每位顾客接受服务的时间（记作 s ）的概率分布为：

服务时间 s (分)	(0,2]	(2,4]
概率 P	0.5	0.5

根据这两个分布，可以产生任意多个到达间隔 i 和服务时间 s 的数据（如果已有大量的实际数据，也可直接应用），如表 2 所示。

Table 2. Arriving time and serving time interval
表 2. 到达间隔 i 和服务时间 s 数据

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
i_k	0	1	3	4	1	3	1	8	2	4	...
s_k	2	3	1	3	4	1	2	4	1	3	...

在任意时刻 t ，系统的状态可以用排队等候的顾客数目和服务员是否在工作来描述。设队列长度为 $L(t)$ ， $L(t)$ 为非负整数；服务员的状态为 $S(t)$ ，服务员工作时令 $S(t)=1$ ，服务员空闲时令 $S(t)=0$ 。引起系统状态改变的行为称为事件。在这里只有两类事件即“顾客到达”事件和“顾客离开”事件。

(1) 顾客到达事件 E1。E1 的事件例程见图 3。

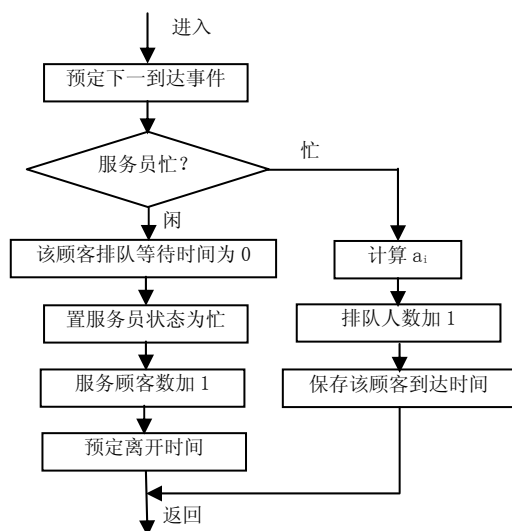


Figure 3. Customer arrival event flow char
图 3. 顾客到达事件例程

(2) 顾客离开事件 E2。E2 的事件例程见图 4。

记第 k 位顾客的到达时刻为 a_k ，离开时刻为 d_k ，在前面我们提到时间间隔为 i_k 和服务时间为 s_k ，则存在递推公式：

$$a_k = a_{k-1} + i_k$$

$$d_k = \max(a_k, d_{k-1}) + s_k, \quad k=1,2,\dots \quad (\text{设 } a_0=d_0=0)$$

a_k ， d_k 分别是顾客到达和顾客离开事件的发生时

刻，系统状态只在这些时刻才有变化。所以在模拟系统的运行过程中，可以设置时钟 t ，让 t 依事件发生的先后顺序，从一个事件的发生时刻跳到下一个事件的发生时刻。这种模拟方式称下一事件时间推进法。

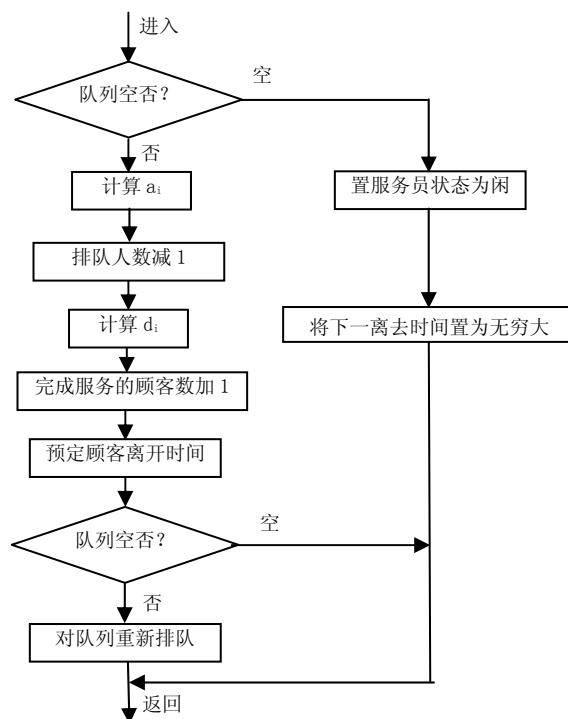


Figure 4. Customer leaving event flow char
图 4. 顾客离开事件例程

4 基于 Matlab 的仿真实现与结果

不妨设 $t=0$ 是第 1 位顾客到达时刻，此时服务员处于空闲状态。设第 n 位顾客离开系统的时刻为终止时刻。

设当前时钟为 t ，队长 $L(t)$ 记作 WL ，服务员状态 $S(t)$ 记作 SS ， t 以后下一个“顾客到达”事件的发生时刻记作 AT ， t 以后下一个“顾客离开”事件的发生时刻记作 DT ，在每一个事件发生时，都要设置（或计算）、记录这 4 个量的数值。仿真程序流程如图 5 所示。

按照图 5 的流程，采用 Matlab 来仿真实现，其主程序框架为

```

Function Main
% 定义全局变量
INPUT;%参数输入子程序
  
```

```

INIT;%执行初始化过程
while(num_custs_delayed<mean_delays_required)
TIMING;%安排下一事件
UPDATE;%更新排队系统
if(next_event_type==1)
ARRIVE;%处理顾客到达程序
if(next_event_type==2)
DEPART;%处理顾客离去程序
end;
end;
REPORT;%生成报告
end;

```

其中，INPUT，INIT，TIMING，UPDATE，ARRIVE，DEPART，REPORT 是仿真的主程序中调用的子程序，以上是整个仿真程序的框架。

通过在 Matlab 中执行可以得出 M/M/1 排队系统模拟运行记录表如表 3 所示。

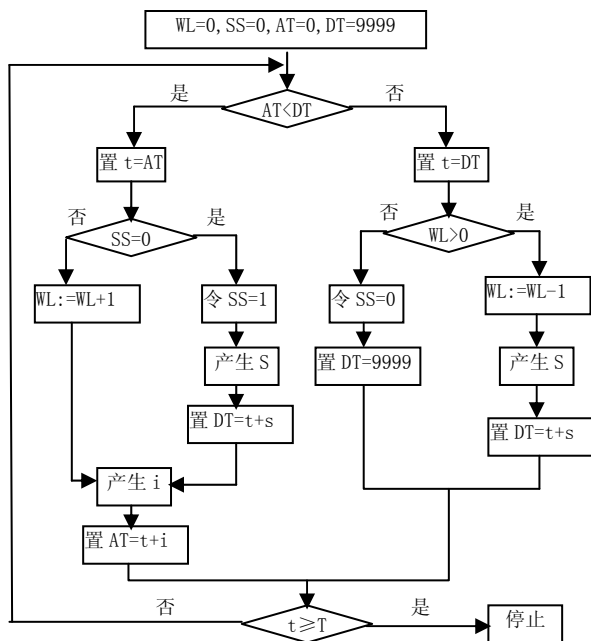


Figure 5.Simulation flow char
图 5. 仿真流程图

Table3.Simulation process record
表 3. 仿真运行记录表

时钟 t	第 k 位顾客到达/离开	QL	SS	AT	DT
0	(初始状态)	0	0	0	9999
0	k=1 到达	0	1	1	2

1	k=2 到达	1	1	4	2
2	k=1 离开	0	1	4	5
4	k=3 到达	1	1	8	5
5	k=2 离开	0	1	8	6
6	k=3 离开	0	0	8	9999
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
15	k=5 离开	1	1	21	16
16	k=6 离开	0	1	21	18

图 6、图 7、图 8 分别是顾客数增加至 200 时的仿真结果。

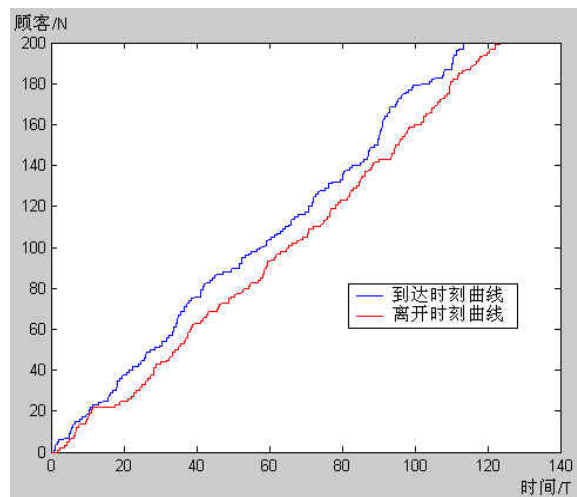


Figure 6.Customer arriving time and leaving time curve
图 6. 各顾客的到达时间和离开时间曲线

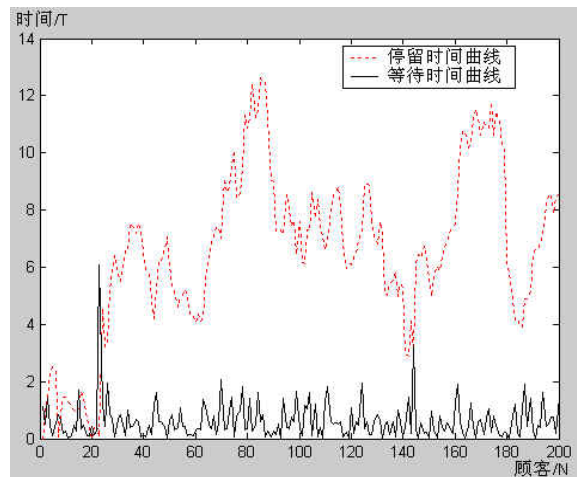


Figure 7. Customer delaying time and waiting time curve
图 7. 各顾客的停留时间和等待时间曲线

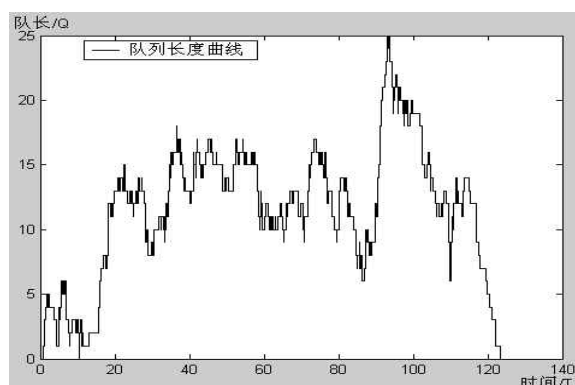


Figure 8. Queuing length changing curve
图 8. 队列的长度变化曲线

5 结束语

计算机仿真法是一种统计仿真，根据它得到的性能分析结果是服从某种分布的统计量，并不是精确解，只是大致区间估计。为了得到较好的数据，需要进行大量的、反复的仿真试验，取平均值，这样才能使分析结果更加具有代表性，更加精确。但是对于排队系统来说仿真法是一种非常实用的方法，它可以将复杂的细节真实地模拟再现，准确地将实际运行中可能遇到的问题模拟出来；可以应用于系统设计、改进和维护的各个阶段，对实际应用具有很强的指导意义。

致 谢

在这里首先感谢海军工程大学信息安全系主任吴晓平教授，对我的悉心指导。同时感谢与我共同完成论文的秦艳琳和廖巍，在论文写作过程中给我很多的

帮助和建议。

References (参考文献)

- [1] ZHANG Hu, YIN Bao-qun, DAI Gui-ping. Sensitivity analysis and simulation of performance for G/M/1 queuing systems [J]. Acta Simulata Systematica Sinica. 2005,(5): 65-67+77.
张虎,殷保群,代桂平等. G/M/1 排队系统的性能灵敏度分析与仿真[J]. 系统仿真学报.2005, (5): 65-67+77.
- [2] YU Qin, MAO Yu-ming. Research on the M/G/1 model with PME-Distributed source[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China . 2007,(S1):88-91.
于秦,毛玉明.PME 分布业务源的 M/G/1 排队模型研究[J].电子科技大学学报, 2007,(S1):88-91.
- [3] WANG Wei-ping, ZHU Yi-fan. Discrete event system modeling and simulation [M]. Hunan: University of Defense Technology Press,1996.
王维平,朱一凡等.离散事件系统建模与仿真[M].湖南: 国防科技大学出版社,1996.
- [4] ZHANG Li, HUO Jia-zhen. Analysis of container terminal queuing system based on simulation model [J]. Computer Engineering and Applications. 2007,(35):239-242.
张莉,霍佳震. 基于仿真模型的集装箱码头排队系统分析[J]. 计算机工程与应用.2007,(35):239-242.
- [5] GU Qi-tai. Discrete event system modeling and simulation [M]. Beijing: Tsinghua University Press,1999.
顾启泰.离散事件系统建模与仿真[M].北京: 清华大学出版社,1999.
- [6] CHEN Hui-ming, WANG Jing-bin. Application of "M/M/1" to fire distribution of single firepower unit shooting multiple targets [J]. Fire Control and Command Control. 2006,(9): 83-85.
陈慧明,王静滨.“M/M/1”在单火力单元射击多目标火力分配中的应用[J].火力与指挥控制.2006,(9): 83-85.
- [7] CHENG Ying-song, YANG Wei-guo, LIAO Guo-ping. Decomposition of M/G/1 type vacation queue with gated-service and non-zero service period [J]. Mathematics in Practice and Theory. 2007,(10):99-103.
程应松,杨卫国,廖果平.非零服务期 M/G/1 闸门服务休假排队系统的随机分解[J].数学的实践与认识. 2007,(10):99-103.