

Guaranteed Cost Control for Uncertain Discrete Singular Systems

Junna JIANG, Hong WANG, Bin HAN

Collage of science, Hebei Polytechnic Univer sity, Tangshan, 063009, China

E-mail: jjn131313@126.com

Abstract: The guaranteed cost control for a class of norm bounded uncertain discrete singular systems was considered in this paper. The objective is to design state-feedback controllers such that the closed-loop systems is regular, causal, stable and the corresponding cost function have a certain upper bound minimized for all admissible uncertainties. Two sufficient conditions for the existence of state-feedback guaranteed cost controllers are obtained in terms of algebraic Riccati equation and linear matrix inequalities, respectively. At last the numerical examples show the validity of our inclusion.

Key words: uncertainties, discrete singular system, guaranteed cost control, state-feedback, linear matrix inequality

带有不确定性的离散广义系统的保成本控制

姜君娜, 王 宏, 韩 冰

河北理工大学理学院 河北唐山 063009

E-mail: jjn131313@126.com

摘 要: 研究一类具有范数有界不确定性的离散广义系统的保成本控制问题, 设计状态反馈控制器使得对所有容许的系统不确定性, 闭环系统正则, 无脉冲, 稳定且最小化闭环性能指标的一个上界值。文中给出了离散广义系统分别基于代数 Riccati 方程和线性矩阵不等式的状态反馈控制器的设计方法, 并举例说明所得结论的可行性。

关键词: 不确定性 离散广义系统 保成本控制 状态反馈 线性矩阵不等式

1 引言

系统的不确定性是导致系统不稳定和系统性能指标恶化的主要根源之一, 因此寻找控制器使得闭环系统同时具有鲁棒稳定性和鲁棒性能要求, 在理论和应用上都有十分重要的价值和意义, 较为有效的方法之一是保性能控制。目前对不确定广义系统的保成本控制问题的研究成果还很少^[1], 主要是因为广义系统的保成本控制问题不仅要保持闭环系统的鲁棒稳定性和满足性能指标要求, 还要求闭环系统是正则无脉冲(因果), 所以广义系统的二次保成本控制问题要比正常的^[2-7]复杂得多。本文考虑了具有满足匹配条件的范数有界^[8]不确定性的离散广义系统的保成本控制问题。

2 系统描述与准备

考虑如下的不确定离散广义系统

$$Ex(k+1) = (A + F\Delta H)x(k) \quad (2-1)$$

其中 $x(k) \in R^n$ 是系统的状态向量, $k \in Z$, E, A, H 是具有适当维数的定常矩阵。 Δ 是反映系统模型中参数不确定性的未知实矩阵, 这里假设

$$\Delta \in \Theta_\Delta := \{\Delta : \|\Delta\| < \infty\} \quad (2-2)$$

定义 1 如果对于所有满足 (2-2) 的不确定性 Δ 有 $\det(zE - A - F\Delta H)$ 不恒等于零, 则称不确定离散广义系统 (2-1) 鲁棒正则。

定义 2 如果对于所有满足式(2-2)的不确定性 Δ 有 $\deg(\det(zE - A - F\Delta H)) = \text{rank} E$, 则称不确定离散广义系统 (2-1) 具有因果关系。

定义 3 如果对于所有满足式(2-2)的不确定性 Δ 存在可逆对称矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 使得

$$E^T P E \geq 0 \quad (2-3-1)$$

$$(A + F\Delta H)^T P(A + F\Delta H) - E^T P E < 0 \quad (2-3-2)$$

成立, 则称不确定离散广义系统 (1-1) 二次稳定.

引理 1 不确定离散广义系统 (2-1) 是二次稳定的, 则系统是鲁棒正则且具有因果关系.

证明同[1]中引理 3.2.1.

引理 2 设 $\Delta^T \Delta \leq I$, A, F, H 是适当维矩阵, 矩阵 P 对称可逆, 若存在常数 $\varepsilon > 0$ 满足 $\varepsilon I - F^T P F > 0$, 则

$$\begin{aligned} & (A + F\Delta H)^T P(A + F\Delta H) \\ & \leq A^T (P^{-1} - \varepsilon^{-1} F F^T)^{-1} A + \varepsilon H^T H \end{aligned}$$

证明: 由引理 1 有 $P^{-1} - \varepsilon^{-1} F F^T$ 可逆, 取

$$Y = (\varepsilon I - F^T P F)^{-\frac{1}{2}} F^T P A - (\varepsilon I - F^T P F)^{\frac{1}{2}} \Delta H$$

根据 $Y^T Y \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} & (A + F\Delta H)^T P(A + F\Delta H) \\ & \leq A^T P A + A^T P F (\varepsilon I - F^T P F)^{-1} F^T P A + \varepsilon H^T H \\ & = A^T (P^{-1} - \varepsilon^{-1} F F^T)^{-1} A + \varepsilon H^T H \end{aligned}$$

3 保成本控制

考虑如下类不确定离散广义系统

$$E x(k+1) = [A + F\Delta(k)H_1]x(k) + [B + F\Delta(k)H_2]u(k) \quad (3-1)$$

其中 $x(k) \in R^n, u(k) \in R^m$ 分别是系统的状态向量和控制输入向量, $k \in Z$, A, B, F, H_1 和 H_2 是具有适当维数的定常矩阵且满足 $\text{rank} E = r \leq n$. $\Delta(k) \in R^{p \times q}$ 是描述系统不确定性的函数矩阵, 且

$$\Delta(k) \in \Theta := \{\Delta(k) : \Delta^T(k) \cdot \Delta(k) \leq I_q\} \quad (3-2)$$

式中 I_q 表示 q 维的单位矩阵, $x(0) = x_0 \in R^n$ 是系统的初始状态.

对系统 (3-1) 定义如下形式的二次型性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k) R_1 x(k) + u^T(k) R_2 u(k)] \quad (3-3)$$

其中加权矩阵 $R_1 \geq 0, R_2 \geq 0$.

引入状态反馈控制器 Ξ

$$u(k) = Kx(k) \quad (3-4)$$

其中 $K \in R^{m \times n}$ 是待定的矩阵. 由不确定系统 (3-1) 和控制器 Ξ 得到闭环不确定离散广义系统

$$E x(k+1) = [A + BK + F\Delta(k)(H_1 + H_2 K)]x(k) \quad (3-5)$$

定义 4 考虑不确定离散广义系统 (3-1) 和性能

函数 (3-3), 如果对于所有的系统不确定性 $\Delta(k) \in \Theta$, 存在一个标称控制器 Ξ 和一个正数 J^* 使得闭环不确定系统 (3-5) 二次稳定, 且性能函数 (3-3) 满足 $J \leq J^*$, 那么就称控制器 Ξ 是不确定离散广义系统 (3-1) 和性能函数 (3-3) 的具有性能函数上界 J^* 的一个状态反馈保成本控制器, 称 J^* 为闭环系统的性能函数上界.

定义 5 如果存在可逆对称矩阵 P , 使得对所有的 $\Delta(k) \in \Theta$ 有

$$\begin{aligned} & R_1 + K^T R_2 K + [A + BK + F\Delta(H_1 + H_2 K)]^T \times \\ & P[A + BK + F\Delta(H_1 + H_2 K)] - E^T P E < 0 \quad (3-6) \end{aligned}$$

则称具有反馈增益矩阵 K 的控制器 Ξ 是不确定离散广义系统 (3-1) 和性能函数 (3-3) 的具有性能矩阵 P 的保成本控制.

定理 1 考虑不确定离散广义系统 (3-1) 和性能函数 (3-3), 如果控制器 Ξ 是具有性能矩阵 P 的保成本控制, 那么闭环离散广义系统 (3-5) 是二次稳定的, 并且性能函数 (3-3) 的闭环值满足 $J \leq x_0^T E^T P E x_0$.

相反, 如果控制器 Ξ 使得闭环离散广义系统 (3-5) 二次稳定, 那么对所有的加权矩阵 R_1 和 R_2 , 该控制器是具有某性能矩阵 $\tilde{R}$ 的二次保成本控制, 其中 P 和 $\tilde{P}$ 具有相同的形式.

证明: " $\Rightarrow$ " 如果控制器 Ξ 是一个保成本控制, 由式 (3-6) 可知对所有的 $\Delta(k) \in \Theta$

$$E^T P E \geq 0$$

$$\begin{aligned} & [A + BK + F\Delta(H_1 + H_2 K)]^T P \times \\ & [A + BK + F\Delta(H_1 + H_2 K)] - E^T P E < 0 \end{aligned}$$

根据定义 3, 系统 (3-5) 二次稳定.

定义 Lyapunov 函数

$$V(k) := x^T(k) E^T P E x(k)$$

对任意非零的 $x(k) \in R^n$, 由式 (3-6) 得

$$\begin{aligned} & x^T(k) \{ R_1 + K^T R_2 K + [A + BK + F\Delta(H_1 + H_2 K)]^T \times \\ & P[A + BK + F\Delta(H_1 + H_2 K)] - E^T P E \} x(k) < 0 \quad (3-7) \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & V(k+1) - V(k) \\ & = x^T(k+1) E^T P E x(k+1) - x^T(k) E^T P E x(k) \\ & = x^T(k) [A + BK + F\Delta(H_1 + H_2 K)]^T P \times \\ & [A + BK + F\Delta(H_1 + H_2 K)] x(k) - x^T(k) E^T P E x(k) \end{aligned}$$

所以根据式 (3-3) 和式 (3-7) 得到 $x^T(k) R_1 x(k) + u^T(k) R_2 u(k) \leq V(k) - V(k+1)$

对不等式两边从 $k=0$ 到 $k=\infty$ 求和

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k)] \leq V(0) - V(\infty)$$

由闭环离散广义系统 (3-5) 二次稳定有

$$V(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x^T(k)E^TPEx(k) = 0$$

$$J \leq V(0) = x_0^T E^T P E x_0$$

" $\Leftarrow$ " 如果控制器 Ξ 使得闭环离散广义系统 (3-5) 二次稳定, 则由引理 1 存在可逆对称矩阵 P 使得对所有的系统不确定性 $\Delta(k) \in \Theta$ 有

$$\begin{aligned} & [A+BK+F\Delta(H_1+H_2K)]^T P \times \\ & [A+BK+F\Delta(H_1+H_2K)] - E^T P E < 0 \end{aligned}$$

成立, 故存在一个常数 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & \varepsilon(R_1 + K^T R_2 K) + [A+BK+F\Delta(H_1+H_2K)]^T P \times \\ & [A+BK+F\Delta(H_1+H_2K)] - E^T P E < 0 \end{aligned}$$

因而这个控制器就是一个具有性能矩阵 $\tilde{P} := P/\varepsilon$ 的保成本控制。

注意到定理 1 中性能函数 J 的上界依赖于初始状态 x_0 , 然而实际系统中往往不能确定系统的初始状态. 为了除去对初始状态的依赖性, 假设 x_0 是零均值随机变量, 且满足 $E\{x_0 x_0^T\} = I_n$, 对性能函数 (3-3) 取数学期望可得到

$$\begin{aligned} \bar{J} &= E\{J\} \\ &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k)\right\} \\ &\leq E\{x_0^T E^T P E x_0\} = \text{tr}\{E^T P E\} \end{aligned}$$

其中 $E\{\cdot\}$ 是取期望算子。

4 控制器分析与设计

本节中我们给出设计保成本控制器的两种充分算法:

定理 2 状态反馈控制器 Ξ 是不确定离散广义系统 (3-1) 和性能函数 (3-3) 的一个保成本控制。如果

(i) 存在矩阵 $Q > 0$ 和常数 $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ 使得下面的代数 Riccati 方程

$$\begin{aligned} & A^T \Phi A - E^T P E + R_1 + \varepsilon H_1^T H_1 + Q - \\ & (B^T \Phi A + \varepsilon H_2^T H_1)^T \Omega^{-1} (B^T \Phi A + \varepsilon H_2^T H_1) = 0 \end{aligned} \quad (4-1)$$

有可逆对称解 P , 且满足 $\varepsilon I - F^T P F > 0$, 其中

$$\Phi = (P^{-1} - \varepsilon^{-1} F F^T)^{-1}$$

$$\Omega = \alpha I + \varepsilon H_2^T H_2 + B^T \Phi B + R_2 > 0$$

此时, 状态反馈控制器 Ξ 矩阵可参数化为

$$K = -\Omega^{-1} (B^T \Phi A + \varepsilon H_2^T H_1) + \Omega^{-\frac{1}{2}} L Q^{\frac{1}{2}} \quad (4-2)$$

其中 $L \in R^{m \times n}$ 满足 $\|L\| < 1$ 的任意矩阵, 且相应的闭环性能函数 (3-3) 满足

$$J \leq x_0^T E^T P E x_0 \quad (4-3)$$

(ii) 存在可逆对称矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 和常数 $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ 满足下面的矩阵不等式

$$E^T P E \geq 0 \quad (4-4-1)$$

$$\begin{pmatrix} A^T P A - E^T P E + \varepsilon H_1^T H_1 + R_1 & A^T P F & 0 \\ F^T P A & F^T P F - \varepsilon I & F^T P B \\ 0 & B^T P F & -\Psi \end{pmatrix} < 0 \quad (4-4-2)$$

其中 $\Psi = \alpha I + \varepsilon H_2^T H_2 + B^T P B + R_2 > 0$ 。

此时状态反馈控制器 Ξ 矩阵可参数化为

$$K = -\Psi^{-1} (B^T P A + \varepsilon H_2^T H_1) \quad (4-5)$$

且性能函数 (3-3) 的闭环值满足式 (4-3)。

证明: 首先证明情况 (i)。由定义 3 知, 若存在可逆对称矩阵 P 是不确定离散广义系统 (3-1) 和性能函数 (3-3) 的保成本矩阵, 则有对所有的系统不确定性 $\Delta(k) \in \Theta$

$$\begin{aligned} & R_1 + K^T R_2 K + [A+BK+F\Delta(H_1+H_2K)]^T \times \\ & P [A+BK+F\Delta(H_1+H_2K)] - E^T P E < 0 \end{aligned} \quad (4-6)$$

由引理 2 存在 $\varepsilon > 0$ 使 $\varepsilon I - F^T P F > 0$ 有

$$\begin{aligned} & [A+BK+F\Delta(H_1+H_2K)]^T P [A+BK+F\Delta(H_1+H_2K)] \\ & \leq (A+BK)^T \Phi (A+BK) + \varepsilon (H_1+H_2K)^T (H_1+H_2K) \end{aligned} \quad (4-6)$$

成立只需

$$\begin{aligned} & (A+BK)^T \Phi (A+BK) + \varepsilon (H_1+H_2K)^T \times \\ & (H_1+H_2K) - E^T P E + R_1 + K^T R_2 K < 0 \end{aligned}$$

上式左边等于

$$\begin{aligned} & (A^T \Phi A - E^T P E + \varepsilon H_1^T H_1 + R_1) + \\ & (A^T \Phi B + \varepsilon H_1^T H_2) K + K^T (B^T \Phi A + \varepsilon H_2^T H_1) + \\ & K^T (B^T \Phi B + \varepsilon H_2^T H_2 + R_2) K \\ & \leq (A^T \Phi A - E^T P E + \varepsilon H_1^T H_1 + R_1) + [\Omega^{\frac{1}{2}} K + \\ & \Omega^{-\frac{1}{2}} (B^T \Phi A + \varepsilon H_2^T H_1)]^T [\Omega^{\frac{1}{2}} K + \Omega^{-\frac{1}{2}} (B^T \Phi A + \\ & \varepsilon H_2^T H_1)] - (B^T \Phi A + \varepsilon H_2^T H_1)^T \Omega^{-1} (B^T \Phi A + \varepsilon H_2^T H_1) \end{aligned}$$

因此只需定理中情况 (i) 的结论成立, 式(4-2)即是所要求的控制器矩阵, 且由定理 1 知式(4-3)成立.

证明情况 (ii). 记

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} A^T P A - E^T P E + \varepsilon H_1^T H_1 + R_1 & A^T P F \\ F^T P A & F^T P F - \varepsilon I \end{pmatrix}, \text{ 根}$$

据 *Schur* 补定理和式 (4-5) 有

$$\begin{aligned} & \Phi_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ F^T P B \end{pmatrix} \Psi^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T P B \end{pmatrix}^T < 0 \\ & \Phi_1 + \left[\begin{pmatrix} K^T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^T P B + \varepsilon H_1^T H_2 \\ F^T P B \end{pmatrix} \Psi^{-1} \right] \times \\ & \Psi \left[\begin{pmatrix} K^T \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi^{-1} \begin{pmatrix} A^T P B + \varepsilon H_1^T H_2 \\ F^T P B \end{pmatrix} \right]^T < 0 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{pmatrix} A^T (X + \mathcal{G}^T Y \mathcal{G}) A - E^T X E + \varepsilon H_1^T H_1 + R_1 & A^T (X + \mathcal{G}^T Y \mathcal{G}) F & 0 \\ F^T (X + \mathcal{G}^T Y \mathcal{G}) A & F^T (X + \mathcal{G}^T Y \mathcal{G}) F - \varepsilon I & F^T (X + \mathcal{G}^T Y \mathcal{G}) B \\ 0 & B^T (X + \mathcal{G}^T Y \mathcal{G}) F & -\Psi \end{pmatrix} < 0 \quad (4-8)$$

其中 $\Psi = \alpha I + \varepsilon H_2^T H_2 + B^T (X + \mathcal{G}^T Y \mathcal{G}) B + R_2 > 0$, 矩阵 $\mathcal{G} \in R^{(n-r) \times n}$ 是行满秩且满足 $E^T \mathcal{G}^T = 0$ 的定常矩阵.

此时状态反馈控制器 Ξ 矩阵可参数化为

$$K = -\Psi^{-1} [B^T (X + \mathcal{G}^T Y \mathcal{G}) A + \varepsilon H_2^T H_1] \quad (4-9)$$

证明: 令 $P = X + \mathcal{G}^T Y \mathcal{G}$ 有

$$E^T P E = E^T (X + \mathcal{G}^T Y \mathcal{G}) E = E^T X E \geq 0$$

将 P 代入式 (4-4-2), 式 (4-5) 即得式 (4-8), 式 (4-9) 成立.

4 示例

在本节中, 用例子来演示如何利用定理 3 来设计不确定离散广义系统的保成本控制器.

考虑不确定离散广义系统(3-1)和性能函数(3-3), 其中的参数由下面的式子给出:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -0.21 & 0 & 0 \\ 0.03 & 1.22 & 0 \\ 0 & 0 & 1.01 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0.10 & 0.05 \\ 0.03 & -0.23 \\ 0.05 & 0.10 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -0.08 \\ -0.02 \\ 0.05 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Phi_1 + \begin{pmatrix} (A^T P B + \varepsilon H_1^T H_2) K + \\ K^T (B^T P A + \varepsilon H_2^T H_1) + & K^T B^T P F \\ K^T (B^T P B + \varepsilon H_2^T H_2 + R_2) K & \\ & F^T P B K & 0 \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{aligned} & R_1 + K^T R_2 K + \varepsilon (H_1 + H_2 K)^T (H_1 + H_2 K) + \\ & (A + B K)^T P F (\varepsilon I - F^T P F)^{-1} F^T P (A + B K) + \\ & (A + B K)^T P (A + B K) - E^T P E < 0 \\ & R_1 + K^T R_2 K + [A + B K + F \Delta (H_1 + H_2 K)]^T P \times \\ & [A + B K + F \Delta (H_1 + H_2 K)] - E^T P E < 0 \end{aligned}$$

定理得证.

下面的定理得出了利用 MATLAB 工具箱便可以方便求解的线性矩阵不等式形式的结论.

定理 3 状态反馈控制器 Ξ 是不确定离散广义系统 (3-1) 和性能函数 (3-3) 的一个保成本控制, 若存在矩阵 $0 < X \in R^{n \times n}$, $Y^T = Y \in R^{(n-r) \times (n-r)}$ 和常数 $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ 满足下面的线性矩阵不等式

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.01 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1.36 & 0 \\ 0 & 0.30 \end{pmatrix}$$

要求设计系统的状态反馈保性能控制器, 且最小化性能函数上界, 给出 $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1.00 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix}$, 根据定理 3 求得

$$X = \begin{pmatrix} 6.4353 & -0.5526 & -0.4507 \\ -0.5526 & -5.2227 & -0.6390 \\ -0.4507 & -0.6390 & -7.5491 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.9501 & 0.6068 \\ 0.2311 & 0.4860 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0.0000, \quad \varepsilon = 6.2603$$

相应控制器 Ξ 和闭环系统性能函数上界为

$$u(k) = \begin{pmatrix} 0.2717 & -5.1775 & 2.6910 \\ -6.2734 & 191.7047 & -84.6193 \end{pmatrix} x(k),$$

$$J^* = 6.4353$$

Reference(参考文献)

- [1] 熊军林. 不确定线性系统的最优保性能控制, 沈阳: 东北大学, 2002.
- [2] 薛安克, 孙优贤. 不确定线性系统保代价控制的鲁棒性分析, 自动化学报, 2001, 27(3): 346-352.
- [3] 俞立, 冯浩. 不确定离散时滞系统的保成本控制, 自动化学报, 2001, 27(3): 392-396.
- [4] 陈国立, 俞立, 杨马英, 褚健. 不确定离散系统的输出反馈保性能控制, 控制与决策, 2004, 17(1): 117-119.
- [5] 陈国立, 俞立, 褚健. 具有状态和控制滞后不确定系统的保性能控制器设计, 自动化学报, 2002, 28(2): 314-316.
- [6] Petersen I. R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. Systems and Control Letters, 1987, 8: 351-357.
- [7] Xu, S., Lam, J., and Yang, C. 2006, H_∞ and positive real control for linear neutral delay systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 46, 1321-1326.
- [8] 俞立, 王景成, 褚健. 不确定离散动态系统的保成本控制, 自动化学报, 1998, 24(3): 414-417.