Radial Operators of the Unit Ball

Weili CHEN, Chenxia ZHAO, Qiuna ZHANG, Yuhuan CUI
College of Light Industry,Hebei Polytechnic University
E-mai: chenwei20050401@sina.com

Abstract: In this paper, we first introduce the definitions of the Bergman Space, and then investigate the theorem of operator that "Let A be a radial bounded operator on L_a^2 ,then A is diagonal operator with respect to the standard basis $\{e_\alpha\}$ of L_a^2 ."

Keywords: Berman Space; radial operators; bounded; unit ball.

单位球上的有界径向算子

陈伟丽，赵晨霞，张秋娜，崔玉环
河北理工大学轻工学院
E-mail: chenwei20050401@sina.com

摘　要：本文首先介绍了 Bergman 空间的基本理论以及径向算子的定义，主要研究了"A 是 L_a^2 上的有界径向算子，那么 A 是关于 L_a^2 的标准正交基$\{e_\alpha\}$的对角算子。"这一算子理论。

关键词：Bergman 空间；径向算子；有界的；单位球。

1 引言

所谓算子就是一种映射。一方面，与线性泛函一样，赋泛线性空间上的线性算子（线性泛函是特殊情形）也是泛函分析研究的基本对象。另一方面，运算永远是数学研究的重要对象，线性算子的理论将微分、积分等在近代学中最为基本的运算手段，抽象为建立在空间上的映射关系，并加以统一处理。

线性算子的理论不仅是学习数学学科本身的关键，而且为其他学科的学习和研究提供了简便的方法和重要的工具。

函数空间上的算子理论，是算子理论中十分活跃，并引起广泛关注的分支之一，解析函数空间上算子理论的研究具有深远的意义。

2 基本定义

定义 2.1[1] dv 是单位球 B_n 上的规范化的勒贝格测度，即 $v(B_n)=1$。把单位球 B_n 上的满足 $\int_{B_n}|f(z)|^2dv(z)<\infty$ 的函数 $f(z)$ 的全体记作

$L^2(B_n,dv)$。

通常定义泛数

$$\|f\|=\left(\int_{B_n}|f(z)|^2dv(z)\right)^{\frac{1}{2}},\left(f\in L^2(B_n,dv)\right),$$

则 $L^2(B_n,dv)$ 是巴拿赫空间。定义巴拿赫空间 $L^2(B_n,dv)$ 的内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$：对于任意的 $f,g\in L^2(B_n)$，

$$\langle f,g\rangle=\int_{B_n}f(z)\overline{g(z)}dv(z)$$

则$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$

定义 2.2 [2] 定义 Bergman 空间 L_a^2：

$L_a^2=\{f\,|\,f$ 是 B_n 上的全纯函数，并且 $f\in L^2(B_n,dv)\}$

我们记 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$ 其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$。对于 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in C_n$ 和复指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，令 $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$

$$e_\alpha(z)=\left(\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!}\right)^{\frac{1}{2}}z^\alpha=b_\alpha z^\alpha$$，其中 α 是复指标，

$e_\alpha(z)$ 是加权 Bergman 空间 L_a^2 的一组标准正交基。[3]

3 径向算子的定义及定理

定义 3.1 （1）如果 f 是 $L^1(B_n)$ 中的函数，函数 $rad(f)$ 定义为

$$rad(f)=\int_{S_n}f(\xi|z|)d\sigma(\xi)$$

我们称 $rad(f)$ 为 f 的径向。如果 f 等于 f 的径向，我们说 f 是径向的。[4]

（2）令 $u=u(n)$ [5] 是 Hilbert 空间 C_n 上所有酉算子组成的集合。这些线性算子 U 是内积不变的：$\langle Uz,Uw\rangle=\langle z,w\rangle$。其中 $z,w\in C_n$，$U\in u$。对于 L_a^2 上的有界线性算子 A，定义：

$$Rad(A)=\int_u V_U^* A V_U \, dU$$

其中 $U\in u$ 是酉矩阵，dU 是 Haar 测度，V_U 是酉算子，满足：对于 $f\in L_a^2$ 和 $z\in B_n$，$(V_U f)(z)=f(zU^H)$。我们说算子 A 是径向的，如果 $A=Rad(A)$。

另外，

$$\langle Rad(A)f,g\rangle=\int_{B_n} Rad(A)f(w)\overline{g(w)}dv(w)$$
$$=\int_{B_n}\left(\int_u V_U^* A V_U f(w)dU\right)\overline{g(w)}dv(w)$$
$$=\int_u dU\int_{B_n} V_U^* A V_U f(w)\overline{g(w)}dv(w)$$
$$=\int_u \langle V_U^* A V_U f,g\rangle dU$$

定理 3.1 A 是 L_a^2 上的有界径向算子，那么 A 是关于 L_a^2 的标准正交基 $\{e_\alpha\}$ 的对角算子。

证明 令 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$。当 $\alpha\neq\beta$ 时，记

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn}\end{pmatrix}=(U_{1,}\cdots,U_n)$$

那么

$$e_\alpha(zU^H)=e_\alpha\left(\sum_{i=1}^n \overline{u_{1i}}z_i,\cdots,\sum_{i=1}^n \overline{u_{ni}}z_i\right)$$
$$=b_\alpha\left(\sum_{i=1}^n \overline{u_{1i}}z_i\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\sum_{i=1}^n \overline{u_{ni}}z_i\right)^{\alpha_n}$$
$$=b_\alpha\left(\sum_{m_1^{(1)}+\cdots+m_n^{(1)}=|m^{(1)}|=\alpha_1}\frac{\alpha_1!}{m^{(1)}!}(\overline{u_{11}}z_1)^{m_1^{(1)}}\cdots(\overline{u_{1n}}z_n)^{m_n^{(1)}}\right)$$
$$\times\left(\sum_{m_1^{(n)}+\cdots+m_n^{(n)}=|m^{(n)}|=\alpha_n}\frac{\alpha_n!}{m^{(n)}!}(\overline{u_{n1}}z_1)^{m_1^{(n)}}\cdots(\overline{u_{nn}}z_n)^{m_n^{(n)}}\right)$$
$$=b_\alpha\sum_{|m^{(1)}|=\alpha_1,\cdots,|m^{(n)}|=\alpha_n}\left[\frac{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}{m^{(1)}!\cdots m^{(n)}!}\right.$$
$$\left.\times\overline{u_{11}}^{m_1^{(1)}}\cdots\overline{u_{n1}}^{m_1^{(n)}}\cdots\overline{u_{1n}}^{m_n^{(1)}}\cdots\overline{u_{nn}}^{m_n^{(n)}}z^{m^{(1)}+\cdots+m^{(n)}}\right]$$
$$=b_\alpha\sum_{|m^{(1)}|=\alpha_1,\cdots,|m^{(n)}|=\alpha_n}\left[\frac{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}{m^{(1)}!\cdots m^{(n)}!}\right.$$
$$\left.\times(U_1^H)^{(m_1^{(1)},\cdots,m_1^{(n)})}\cdots(U_n^H)^{(m_n^{(1)},\cdots,m_n^{(n)})}z^{m^{(1)}+\cdots+m^{(n)}}\right]$$

并且

$$\overline{e_\beta(zU^H)}$$
$$=b_\beta\sum_{|t^{(1)}|=\beta_1,\cdots,|t^{(n)}|=\beta_n}\left[\frac{\beta_1!\cdots\beta_n!}{t^{(1)}!\cdots t^{(n)}!}\right.$$
$$\left.\times(U_1^T)^{(t_1^{(1)},\cdots,t_1^{(n)})}\cdots(U_n^T)^{(t_n^{(1)},\cdots,t_n^{(n)})}\overline{z}^{t^{(1)}+\cdots+t^{(n)}}\right]$$

所以

$$\langle Ae_\alpha,e_\beta\rangle=\int_u\langle AV_Ue_\alpha,V_Ue_\beta\rangle dU$$
$$=\int_u\int_{B_n}Ae_\alpha(zU^H)\overline{e_\beta(zU^H)}dV(z)dU$$

$$=\int_u\int_{B_n}\left\{b_\alpha\sum_{|m^{(1)}|=\alpha_1,\cdots,|m^{(n)}|=\alpha_n}\left[\frac{\alpha!}{m^{(1)}!\cdots m^{(n)}!}\right.\right.$$
$$\left.\times(U_1^H)^{(m_1^{(1)},\cdots,m_1^{(n)})}\cdots(U_n^H)^{(m_n^{(1)},\cdots,m_n^{(n)})}A\left(z^{m^{(1)}+\cdots+m^{(n)}}\right)\right]$$
$$\times b_\beta\sum_{|t^{(1)}|=\beta_1,\cdots,|t^{(n)}|=\beta_n}\left[\frac{\beta!}{t^{(1)}!\cdots t^{(n)}!}\right.$$
$$\left.\left.(U_1^T)^{(t_1^{(1)},\cdots,t_1^{(n)})}\cdots(U_n^T)^{(t_n^{(1)},\cdots,t_n^{(n)})}\times\overline{z}^{t^{(1)}+\cdots+t^{(n)}}\right]\right\}dV(z)dU$$

$$=b_\alpha b_\beta\sum_{\substack{|m^{(1)}|=\alpha_1,\cdots,|m^{(n)}|=\alpha_n\\|t^{(1)}|=\beta_1,\cdots,|t^{(n)}|=\beta_n}}\left(\frac{\alpha!\beta!}{m^{(1)}!\cdots m^{(n)}!t^{(1)}!\cdots t^{(n)}!}\right.$$
$$\times\int_{B_n}A\left(z^{m^{(1)}+\cdots+m^{(n)}}\right)\overline{z}^{t^{(1)}+\cdots+t^{(n)}}dV(z)$$
$$\times\int_u(U_1^T)^{(t_1^{(1)},\cdots,t_1^{(n)})}(U_1^H)^{(m_1^{(1)},\cdots,m_1^{(n)})}$$
$$\left.\cdots(U_n^T)^{(t_n^{(1)},\cdots,t_n^{(n)})}(U_n^H)^{(m_n^{(1)},\cdots,m_n^{(n)})}dU\right)$$

从而存在一个 i 使得

$$(t_i^{(1)},\cdots,t_i^{(n)})\neq(m_i^{(1)},\cdots,m_i^{(n)})。$$

事实上，如果任意的 i 都满足

$$(t_i^{(1)},\cdots,t_i^{(n)})=(m_i^{(1)},\cdots,m_i^{(n)})，$$

那么

$$\alpha_i=|m^{(i)}|=m_1^{(i)}+\cdots+m_n^{(i)}=t_1^{(i)}+\cdots+t_n^{(i)}=|t^{(i)}|=\beta_i$$

因此 $\alpha=\beta$，与假设 $\alpha\neq\beta$ 矛盾。故

$$\int_u(U_1^T)^{(t_1^{(1)},\cdots,t_1^{(n)})}(U_1^H)^{(m_1^{(1)},\cdots,m_1^{(n)})}\cdots(U_n^T)^{(t_n^{(1)},\cdots,t_n^{(n)})}(U_n^H)^{(m_n^{(1)},\cdots,m_n^{(n)})}dU$$
$$=0$$

从而 $\langle Ae_\alpha,e_\beta\rangle=0$，这就说明了 A 是对角算子。

注意：A 是有界径向算子，令 $Ae_\alpha=\sum_\gamma\langle Ae_\alpha,e_\gamma\rangle e_\gamma=\langle Ae_\alpha,e_\alpha\rangle e_\alpha=a_\alpha e_\alpha$，其中 $a_\alpha=\langle Ae_\alpha,e_\alpha\rangle$ 是 A 的对角线元素。

978-1-935068-10-5 © 2010 SciRes.

致　谢

本论文在研究与写作过程中得到了同事的大力支持与帮助，同时在修改和补充过程中组委会专家们提出了宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢。

References (参考文献)

[1] K.Zhu, Operator Theory in Function Space,Marcel Dekker, New York,1990.

[2] K.Zhu, Space of Holomorphic Function in the Unit Ball, Spinger-Verlag (GTM 226),2004

[3] Karel Stroethoff, Compact Toeplitz Operators on Bergman Space, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 124(1998), 156-160

[4] Nina Zorboska, The Berezin Transform and Radial Operators, Proceedings of The American Mathematical Society, 130(2002), 793-800

[5] Walter Rudin, Function Theory in the Unit Ball of C_n, Springer-Verlag,15-22