

A CVaR-Based Nonlinear Stochastic Model for Water Resources Management

Liguo Shao¹, Shengji Luan²

¹College of Environmental Sciences and Engineering, Peking University, Beijing, China

²Shenzhen Graduate School, Peking University, Shenzhen, China

Email: shao_liguo@hotmail.com, luansj@szpku.edu.cn

Abstract: A CVaR-based nonlinear two-stage stochastic programming (CNTSP) model was developed in this study for supporting water resources allocation under uncertainty. CNTSP model was formulated based on an integration of Conditional Value-at-Risk (CVaR) constraint into a two-stage stochastic programming (TSP) framework, and could be used to deal with uncertainties expressed as probability distributions. Most importantly, the measure of extreme expected loss on the second-stage penalty cost was incorporated into the model constraints, such that the trade-off between system economy and extreme expected loss could be conducted. And the introduction of a nonlinear penalty function avoid the situation that single water user undertook large amount of expected risk loss. The developed model was applied to a water resources allocation problem. The result demonstrated that the CNTSP model could help decision makers obtain viable water allocation alternatives, and conduct trade-off analysis between economic benefit and risk control.

Keywords: water resources management; Conditional value-at-risk; two stage stochastic programming; uncertainty

基于风险价值的非线性两阶段随机水资源管理模型

邵立国¹, 栾胜基²

¹北京大学环境科学与工程学院, 北京市, 中国, 100871

²北京大学深圳研究生院, 深圳市, 中国, 518055

Email: shao_liguo@hotmail.com, luansj@szpku.edu.cn

摘要: 本研究提出基于风险价值的非线性两阶段随机规划模型(CNTSP), 并应用其处理水资源管理中的不确定性信息。该模型通过引入条件风险价值可以将决策者的风险偏好纳入到水资源配置方案的决策过程中, 并通过引入非线性惩罚函数对传统的两阶段随机规划模型进行改进, 使得 CNTSP 模型既以系统收益最大化为目标, 又可以避免水资源短缺风险过于集中于某一用户或部门。结果表明, 该模型可以辅助决策者在系统经济收益和风险规避之间进行权衡, 从而生成有效而合理的水资源配置方案。

关键词: 水资源管理; 风险价值; 两阶段随机规划; 不确定性

1 引言

水资源配置是涉及多个学科和部门的复杂问题, 水资源配置的合理性和有效性是影响到水资源持续利用和地区可持续发展的重要因素。然而, 不确定性的存在使得水资源系统的管理更为复杂。水资源配置中的不确定性主要包括水资源总量和分布、水资源需求量等。对不确定性的考虑和处理方式将直接影响水资源配置的决策过程和实施效果。因此, 如何妥善处理水资源系统中的不确定性是目前广受关注的热点问题之一。

“十一五”国家科技支撑计划重点项目(2007BAC16B04) 资助

近年来, 为解决水资源环境管理中的不确定性问题, 已经开发出了一系列不确定性模型, 主要包括随机规划模型、模糊规划模型和区间规划模型等^{[3][4][7]}。其中, 两阶段随机规划模型是常用的不确定性方法之一^[2]。其主要特点在于: (1)能够处理随机性不确定水资源数据, (2)能对未来政策情景进行分析和必选, 制定未来的供水计划和方案等。两阶段随机规划模型是水资源及环境管理常用的不确定性规划方法之一, 但其对系统风险等方面尚缺乏考虑, 主要表现在: (1)在制定配置方案过程中, 虽然将缺水所带来的损失纳入模型, 但缺

乏对极端缺水情况的考虑；（2）模型对不同用户和不同缺水情况均采用固定惩罚值计算所受损失，这将导致系统将缺水带来的损失过分集中于收益较低用户或部门，导致资源分配上的不公平。

为克服传统两阶段随机模型的以上问题，本文提出基于条件风险价值的非线性两阶段随机模型，对系统的经济收益和风险损失之间进行权衡，为管理者提供更为合理而公平的决策支持。

2 模型介绍

2.1 CNTSP 模型构建

假设不同用户的需水量是在一定范围内变动的，即存在最低配水目标和最高配水目标，而总体可供水量是随机的，系统其它参数是确定的。确定不同用户在缺水条件下产生的损失为非线性函数，即缺水量越大，单位缺水量所产生的损失也越大，其具体函数关系应由实际调研确定。

为计算极端缺失情况下的水资源短缺造成的系统损失，将金融风险中的 CVaR 模型引入本研究中^{[5][6]}。CVaR 模型是金融风险管理中常用的优化方法，目前在环境等相关领域逐渐收到关注^{[8][9]}。依据 CVaR 模型中的定义，本研究将水资源系统水资源短缺风险定义为水资源短缺所产生的期望损失，即损失函数的均值，并确定决策者的可接受最大风险和置信水平。则以上水资源配置问题可用非线性两阶段随机规划表示：

$$\max f = \sum_{i=1}^m NB_i T_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_j C(x)_j D_{ij}$$

Subject to:

$$q_j \geq \sum_{i=1}^m (T_i - D_{ij}), \forall j$$

$$\zeta + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{j=1}^N p_j \eta_j \leq \beta$$

$$L(D_{ij}, \xi_j) - \zeta - \eta_j \leq 0$$

$$\eta_j \geq 0$$

$$T_{i\max} \geq T_i \geq T_{i\min}$$

其中， f 为系统净收益； $C_{ij}(x)$ 为提供给用户 i 的水量没有达到承诺数量时，用户 i 损失的经济效益函数； D_{ij} 为情景 j 下用户 i 水资源的短缺量； m 为用水用户的数量； NB_i 为单位分配水量到用户 i 所产生的经济效益； $L(x, y)$ 为系统的损失函数； Q 总的可利用水量；

T_i 为承诺给用户 i 的分配水量； p_j 为第 j 个水资源情景的概率； $T_{i\max}$ 为承诺给用户 i 的最大分配水量； ζ 为系统不确定性的随机变量； α 为置信区间； β 为可接受期望损失约束值； η_j 为正辅助变量；其中 D_{ij} 和 T_i 为系统的决策变量。

关于 CVaR 模型的构建方面，主要包括系统损失函数 $L(x, y)$ 的确定、 α 、 β 的选择等，其中 $L(x, y)$ 应根据实际数据统计而得，而 α 、 β 则应根据决策者的风险偏好确定。受篇幅所限，关于 CVaR 模型的详细介绍请参阅相关的参考文献。

2.2 模型求解过程

CNTSP 模型的主要求解过程见图 1。CNTSP 模型的求解步骤主要包括以下四步：

- (1) 根据水资源系统中的水量信息、政策情景、决策者风险偏好建立 CNTSP 模型；
- (2) 根据研究区域水资源分布函数进行随机采样，得到水资源分布可能情景；
- (3) 根据决策者风险偏好和模型的实际运行情况调整模型的相关参数；
- (4) 根据各参数求解 CNTSP 模型，生成水资源可选的配置方案。

3 案例研究

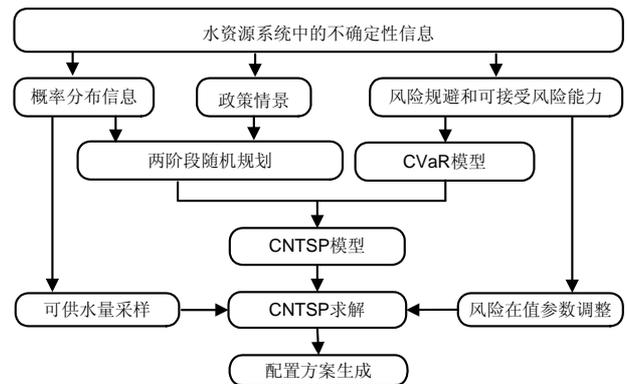


Figure 1. General framework of the RITSP model
图 1. CNTSP 模型的基本框架

3.1 参数设定

为验证模型的有效性，本文选用 Huang and Loucks^[1]中的例子作比较。其中水资源管理系统的基本信息如表 1 所示：

Table 1. Information about water users and their economic benefit
表 1. 用户用水信息表

指标	指标释义	用户 1	用户 2	用户 3
$T_{i\max}$ (万吨)	最大供水目标	5.0	8.5	17.0
T_{imin} (万吨)	最小供水目标	3.0	4.5	7.0
NB_i (万元/万吨)	单位供水收益	80.0	65.0	50.0
C_i (万元/万吨)	单位缺水惩罚	120.0	90.0	60.0

注：部分数据来自于 Huang and Loucks (2000)。

为模拟真实情况下的水资源分布信息，本模型中设定可供水资源分布为卡方分布，经过随机抽样得到不同概率条件下的可获得的水资源状况以模拟不确定性条件下的水资源情景，相关参数见表 2。

Table 2 Information about streamflow distributions (part)
表 2 河流的水资源分布信息(部分)

情景	概率	可供水资源量 (万吨)
S_1	0.01	15.0
S_2	0.01	16.6
S_3	0.02	18.2
S_4	0.02	19.7
S_5	0.03	21.3
S_6	0.04	22.9
S_7	0.05	24.5
S_8	0.05	26.1
...
S_{20}	0.008	45.0

在 CVaR 计算中需要确定 α 、 β 的值，其中 β 用于表征系统最大可接受的风险损失， α 表征风险损失小于 β 的置信区间。经过一系列运算，得出本系统的 α 、 β 的有效范围分别在 $[0-0.99]$ ， $[0-800]$ 之间，为研究模型最优解与各参数之间的响应关系，本文选择 α 分别为 0.9, 0.95 和 0.99, β 分别为 50 万元, 200 万元, 800 万元等情况下对模型进行求解和结果分析。

3.2 结果分析

根据以上参数，对 CNTSP 模型求解，得到在不同 α 、 β 条件下系统收益目标和配水方案（见表 2）和不同 α 、 β 条件下不同情景各用户的缺水量（见表 3）。

CNTSP 模型的解体现了两阶段模型中最大化目标的性质，在本研究中表现为对经济收入的获取。在一定的 CVaR 的约束下，模型对经济收益高的用户制定较高的配水计划，而对单位收益较低的用户，则采用较低的配水计划。如当 $\alpha=0.95$ 而 $\beta=\beta_2$ 时， T_{1opt} 、 T_{2opt} 、 T_{3opt} 分别为 5.0, 6.8, 和 7.0 万吨。可以看出，第一个用户

由于单位水资源消耗的收益最大，因此模型将满足其最高的配水目标，第三个用户由于单位水资源消耗的收益最小，因此模型主要满足其最低的配水目标，而第二个用户的水资源消耗产生的收益介于前两者之间，因此其配水目标在最高目标和最低目标之间。

同时，由于 CNTSP 模型在第二阶段中引入了非线性惩罚函数，因此模型将根据惩罚值的变化，在不同水资源短缺情景下，对各用户的配水量进行调节。如当 $\alpha=0.9$ 而 $\beta=\beta_2$ 时，系统中三个用户在情景 $j=1, 2, 3$ 时的缺水量分别为 $[1.3, 1.5, 1.8]$ ， $[0.9, 1.0, 1.2]$ 和 $[0.4, 0.5, 0.6]$ 万吨，可以看出，由于非线性惩罚函数的存在，模型将缺水的风险损失按照一定比例分配各个用户中。而传统的两阶段模型在处理此类问题时，通常是将所有风险的损失都集中于用户 3，其次再将风险损失分担到用户 2，最后才令用户 1 承受风险损失。此类处理方法虽然在系统总体收益中可以取得收益最大的配置方案，但没有考虑到不同用户之间用水的公平性，造成某一部门用户的巨额损失。若在水资源严重缺乏的条件下，将对该用户产生巨大损失将可能直接影响该用户的持续发展。

由于 CVaR 模型的引入，使得模型可以将决策者的风险偏好纳入到配置目标设定和配水计划的安排中。表 2 中数据显示，在 α 固定不变的条件下，随着 β 值的增加，配水目标逐渐增加。例如当 $\alpha=0.95$ 时，当 β 分别从 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 时， T_{2opt} 则分别为 5.5, 6.8, 8.5 万吨。随着 β 值的增加，表明决策者可接受较高的风险损失，倾向于选择较高经济收益的配水目标。在 β 固定不变的条件下，随着 α 值的增加，配水目标逐渐降低。如当 $\beta=\beta_2$ 时，当 α 分别取 0.9, 0.95, 0.99 时， T_{2opt} 则分别为 7.5, 6.8, 5.8 万吨，表明随着 α 值的增加，决策者将选择风险规避的水资源配置方案。从以上讨论可以得出结论， α 和 β 可以反映决策者的风险偏好，通过调节 α 和 β 的取值，管理者可以在系统的收益和期望损失之间进行权衡。

Table 2 Objective function value and optimal targets from the CNTSP model under different α and β levels

表 2 不同 α 、 β 条件下系统收益目标和配水方案

β	配水目标	α		
		$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.99$
β_1	T_{1opt}	5.0	5.0	5.0
	T_{2opt}	6.1	5.5	4.7
	T_{3opt}	7.0	7.0	7.0
	总配水量	18.1	17.5	16.7

	f_{opt}	1143	1108	1058
β_2	T_{1opt}	5.0	5.0	5.0
	T_{2opt}	7.7	6.8	5.8
	T_{3opt}	7.0	7.0	7.0
	总配水量	19.7	18.8	17.8
	f_{opt}	1228	1184	1122
β_3	T_{1opt}	5.0	5.0	5.0
	T_{2opt}	8.5	8.5	7.4
	T_{3opt}	8.3	7.2	7.0
	总配水量	21.8	20.7	19.4
	f_{opt}	1287	1270	1214

Table 3 Solutions from the CNTSP model under different α and β levels

表 3 不同 α, β 条件下 CNTSP 模型的解

	β_1			β_2			β_3			
	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3	
α_1	s_1	0.9	1.0	1.2	1.3	1.5	1.8	1.9	2.2	2.7
	s_2	0.4	0.5	0.6	0.9	1.0	1.2	1.5	1.7	2.1
	s_3	0.0	0.0	0.0	0.4	0.5	0.6	1.0	1.2	1.4
	s_4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.6	0.7	0.8
	s_5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.2	0.2
α_2	s_1	0.7	0.8	1.0	1.1	1.2	1.5	1.6	1.8	2.2
	s_2	0.3	0.3	0.4	0.6	0.7	0.9	1.1	1.3	1.6
	s_3	0.0	0.0	0.0	0.2	0.2	0.3	0.7	0.8	1.0
	s_4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.3	0.3	0.4
	s_5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
α_3	s_1	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.1	1.2	1.4	1.7
	s_2	0.0	0.1	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.1
	s_3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.3	0.4	0.5
	s_4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	s_5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

注: s_1 至 s_5 表示不同的水资源情景; u_1 至 u_3 表示不同的用户;

4 结论

以上讨论可以得出结论: CNTSP 模型同时具有 TSP 和 CVaR 模型的特点, 既可以寻求系统最大收益的水资源配置目标和方案, 又可以根据决策者的风险偏好对未

来各种情景下的水资源配置方案进行调节, 并避免了将风险损失集中于某一用户的情况。

但该模型尚存在以下不足: (1) 模型只考虑了水资源系统中的随机不确定性的处理, 缺少对模糊和灰色信息的处理, 可在进一步研究中将模糊最优化和灰色最优化模型纳入到该模型中; (2) 模型根据决策者不同的风险偏好, 产生了一系列的配置方案, 虽然可以反映出决策者的方向偏好, 但尚未提供对于对不同方案的比选方面的信息和说明, 因此可在进一步的研究中增加多属性决策的相关内容, 以便于决策者更为合理地对不同的水资源配置方案进行选择。

References (参考文献)

- [1] Huang, G.H. and Loucks, D.P., 2000. An inexact two-stage stochastic programming model for water resources management under uncertainty[J]. *Civil Engineering and Environmental Systems*, 17 (2), 95-118.
- [2] Kall, P., 1979. Computational methods for solving two-stage stochastic linear programming problems[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 30 (2), 261-271.
- [3] Li, Y.P., Huang, G.H., Xiao, H.N., and Qin, X.S., 2007. An Inexact Two-Stage Quadratic Program for Water Resources Planning[J]. *Journal of Environmental Informatics*, 10 (2), 99-105.
- [4] Maqsood, I., Huang, G.H., and Yeomans, J.S., 2005. An interval-parameter fuzzy two-stage stochastic program for water resources management under uncertainty[J]. *European Journal of Operational Research*, 167 (1), 208-225.
- [5] Rockafellar, R.T., and Uryasev, S., 2000. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2 (3), 21-41.
- [6] Rockafellar, R.T., and Uryasev, S., 2002. Conditional value-at-risk for general loss distributions[J]. *Journal of Banking and Finance*, 26 (7), 1443-1471.
- [7] Qin, X.S., and Huang, G.H., 2009. An Inexact Chance-constrained Quadratic Programming Model for Stream Water Quality Management[J]. *Water Resources Management*, 23 (4), 661-695.
- [8] Webby, R.B., Adamson, P.T., and Boland, J., 2007. The Mekong—applications of value at risk (VaR) and conditional value at risk (CVaR) simulation to the benefits, costs and consequences of water resources development in a large river basin[J]. *Ecological Modelling*, 201 (1), 89-96.
- [9] Yamout, G. M., Hatfield, K., and Romeijn, H.E., 2007. Comparison of new conditional value-at-risk-based management models for optimal allocation of uncertain water supplies[J]. *Water Resources Research*, 43 (7), W07430.