

Study on Textile Pattern Design Based on Mandelbrot Set

Rong Hou^{1,2}, YingLin Li¹, Lihui Cao³

¹ School of Textile, Tianjin Polytechnic University, Tianjin, P. R. China

² Dezhou Vocational and Technical College, Dezhou, P. R. China

³ School of Art and Clothing, Tianjin Polytechnic University, Tianjin, P. R. China

Email: hrltlxq@163.com, tx8875@126.com, caolihui-007@163.com (Corresponding author: YingLin Li)

Abstract: Fractal geometry is a new subject that study of the graphics and structures which are infinite complex but have self-similarity. In recent 30 years, fractal geometry has a rapid development. Based on the study of iteration formulas of Mandelbrot set, the most famous set in fractal geometry, method of automatically generate fractal graphics has been discussed in this paper, with the help of computer powerful operation ability. And try to use these graphics to design textile patterns. First design Mandelbrot set fractal pattern generation algorithm, then write program in Visual C++ environment, once set different initial values or parameter values for the program, very different fractal patterns can be generated. Four different fractal patterns using different parameters are showed in the paper. The application of fractal patterns has put forward a new approach of textile pattern design.

Keywords: Fractal; Mandelbrot Set; Iteration; Algorithm; Textile Pattern

利用 Mandelbrot 集分形图进行纺织图案设计的研究

侯 榕^{1,2}, 李英琳¹, 曹立辉³

¹ 天津工业大学纺织学院, 天津, 中国, 300160

² 德州职业技术学院, 德州, 中国, 253034

³ 天津工业大学艺术与服装学院, 天津, 中国, 300387

Email: hrltlxq@163.com, tx8875@126.com, caolihui-007@163.com (通讯作者: 李英琳)

摘 要: 分形几何是一门研究无限复杂但具有自相似性的图形和结构的新学科, 在近三十年发展迅速。本文在研究分形几何中最为著名的 Mandelbrot 集迭代公式的基础上, 探讨了借助计算机强大的运算能力, 自动生成分形图形的方法, 并尝试将这些图形应用到纺织图案设计中。设计 Mandelbrot 集分形图案生成算法, 并在 Visual C++ 环境下编写程序, 通过设定不同的初始值和参数值, 可以生成截然不同的图案, 本文展示了四种不同参数值下的分形图案, 为纺织图案的设计开创了新的思路。

关键词: 分形; Mandelbrot 集; 迭代; 算法; 纺织图案

1 概述

分形艺术是基于分形几何理论所创建的一类新媒体艺术, 是计算机技术在图形图像艺术领域的应用^[1]。近年来, 分形图在纺织图案设计中的应用研究吸引了不少学者的目光。1997 年, 戚玉簪、邵世煌、耿兆丰已经尝试将分形图形引入电脑横机花型准备系统中, 以提高花型设计的快速性和花色品种的多样性^[2]。1999 年, 张永宁、甘应进对分形图形在纺织品花型 CAD 中的应用进行了探讨^[3]。2003 年, 杨旭红、李栋高、颜晓华、张

聿根据分形 L 系统的构图原理, 运用 VB 语言编写程序, 生成典型的分形曲线, 产生各种适用于纺织品的艺术图案^[4]。2007 年, 何方容、包振华、陈东方、吴国红分析了分形艺术在纺织图案设计中的应用, 并利用自行开发的分形程序设计出系列纺织图案, 结合纺织工艺技术, 对这类纺织图案在纺织工艺上的再现问题进行了研究^[5]。

分形图的产生改变了传统纺织图案的设计观念, 它具有强烈的视觉冲击力和吸引力, 可通过数字喷墨印花等技术手段实现。分形图除了其本身的艺术价值外, 在

纺织、印染、广告、装潢等众多领域都具有广阔的应用前景。

2 分形原理简介

自然界中分形图形随处可见，如山脉、海岸线、河流、浮云、闪电、草木、血管等。它们的共同特点是，不规则、不平滑、非线性，无法用传统的欧氏几何来描述。

1904 年，瑞典数学家 Koch 将一个等边三角形的三条边都三等分，在每条边中间的一段再凸起一个小等边三角形，这样一直进行下去，研究出一种称为雪花的图形，如图 1 所示。理论上可以证明这种不断构造的雪花的周长是无限的^[6]。

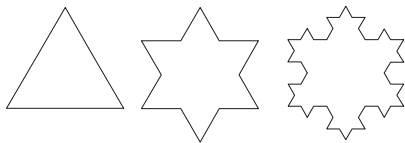


Figure 1. Koch snowflake
图 1. Koch 雪花

1975 年，美籍法国数学家 Mandelbrot 推广这种雪花的构造，在其《自然界中的分形几何》一书中正式引入了分形（fractal）这一概念。此前，Mandelbrot 曾提出这样一个问题：大不列颠的海岸线到底有多长？假设用一把长度为 1000m 的尺子测量大不列颠的海岸线，得到长度值 L_1 ，若要考虑更多细节进行更精确的测量，可选用更短的尺子，如长度为 10m 的尺子进行测量，得到另一个长度值 L_2 ，显然 $L_2 > L_1$ 。设尺子长度为 r ，测量结果为 $L(r)$ ，若 r 趋向于 0，则 $L(r)$ 趋向于无穷，这就是说，大不列颠的海岸线长度与测量的尺子长度有关，为一个不确定数。Mandelbrot 正是通过上述实例阐释细节的无穷回归和测量尺度的减小都会得到更多的细节。分形几何是一门研究无限复杂但具有自相似性的图形和结构的新学科，它有几个特点：

(1) 具有自相似性，如图 2 所示。

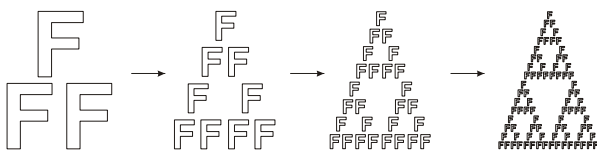


Figure 2. Self-similarity of fractal pattern
图 2. 分形图形的自相似性

(2) 具有无限精细的结构。

(3) 无法用欧氏几何描述。

(4) 可以用简单的规则加以描述，图形由递归、迭代方法产生。

3 利用 Mandelbrot 集生成图案算法设计

Mandelbrot 集由分形几何的创始人 Mandelbrot 开创，是分形几何中最为经典的一个集合。它由一个简单的数学公式迭代生成，却演绎出梦幻般美丽的图案，放大它的任何细部，都能变幻出更加奇妙的景象^[7]。从数学角度讲，Mandelbrot 集是一个复数的集合，即在复平面上组成分形图形的点的集合。Mandelbrot 集的迭代公式为：

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + c \quad (1)$$

其中 Z 、 c 都为复数， c 在复平面的某一指定范围内变化。从 $Z_0 = 0$ 开始，代入上述公式中进行迭代运算。经过不断迭代，最后得到的 Z 值有以下三种情况：

(1) Z 值趋向于无穷；

(2) Z 值趋向于零；

(3) Z 值既不趋向于无穷，也不趋向于零，只停留在有限半径的圆盘内。

情况(3)中既不趋向于无穷也不趋向于零的点，就是“Mandelbrot 集”部分。通过设定 Z 的模 $|Z|$ 的取值范围，就可以确定 Mandelbrot 集。

设 x 、 y 分别为 Z 的实部和虚部， $Z = x + yi$ ， a 和 b 分别为 c 的实部和虚部， $c = a + bi$ ，上述迭代公式可写为：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases} \quad (2)$$

为了便于描述，定义以下主要变量和关系式，如表 1 所示：

Table 1. Main variables and expressions in the algorithm
表 1. 算法中主要变量和关系式

变量/关系式	含义
length/width	图形绘制区域的长/宽
amin/amax/bmin/bmax	用于记录 c 值范围
$dx = (amax - amin) / length$	计算 a 沿每像素点的增量
$dy = (bmax - bmin) / width$	计算 b 沿每像素点的增量
for (i=0; i<width; i++) $a = amin + i * dx$	a 沿 x 方向开始迭代， 每次增量为一个 dx

for (j=0;j<height;j++)	b 沿 y 方向开始迭代， 每次增量为一个 dy
b=bmin+j*dy	
abs(Z)	Z 的模
L	Z 模的敛散临界值
n	迭代次数循环变量
nmax	迭代次数的最大值

变量 L 和 nmax 是结束迭代的标志，一旦 $\text{abs}(Z) > L$ 或迭代次数 $n > nmax$ ，则迭代停止。

利用 Mandelbrot 集生成纺织图案算法实现过程如下：

(1) 变量初始化。获取图形绘制区域的尺寸大小 length 和 width，并建立 c 值与绘图区域的映射，使绘图区域的每一像素点都对应一个唯一确定的 c 值；

(2) 为 x_0, y_0 赋初值， $x_0 = 0, y_0 = 0$ ，通过给定 amin, amax, bmin, bmax 的值确定 c 值，并将此 c 值带入 Mandelbrot 集迭代公式(2)中进行迭代；

(3) 每次迭代完成后都要判断是否 $\text{abs}(Z) > L$ ，以及是否迭代次数 $n > nmax$ ，只要有一个条件满足就退出迭代，并根据迭代次数 n 给对应像素点着色。

(4) 重复第(2)、(3)步，直至所有的 c 值全部运算完毕，即所有 $\text{length} \times \text{width}$ 区域内像素点均被着色。

4 利用 Mandelbrot 集生成图案效果展示

根据迭代公式(2)及分形图案生成算法，将各参数值分别设置为 $\text{length} = 600; \text{width} = 450; \text{amin} = -1.75; \text{amax} = 1.2; \text{bmin} = -1.5; \text{bmax} = 1.25; \text{nmax} = 100; L = 4; x_0 = 0; y_0 = 0$ ；选用三种图案颜色：RGB(250,123,250)、RGB(75,77,194)、RGB(72,209,204)，得到的分形图如图 3 所示。

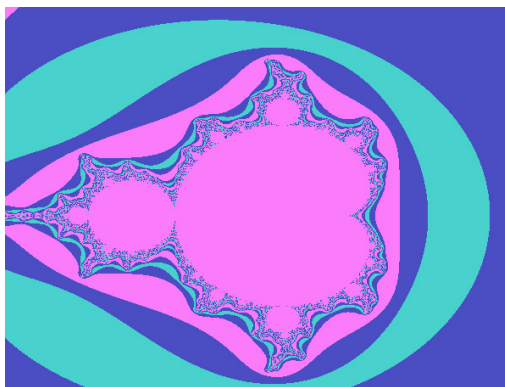


Figure 3. Fractal pattern effect 1
图 3. 分形图案效果 1

通过对迭代公式进行变换，或者对参数值进行变

换，可以生成大量不同形状的图案。此时纺织图案设计人员只需从中筛选出可取的图案即可。这将大大降低图案设计难度，提高设计效率，将设计人员从繁琐的绘图工作中解脱出来。在图案生成前，设计人员并不能完全预测图案的形状，往往会产生意想不到、妙趣横生的效果。

当其他参数值保持不变， $L=2$ 时生成的图案如图 4 所示。可以看出，一个参数的微小变动会使图案效果发生较大的变化。

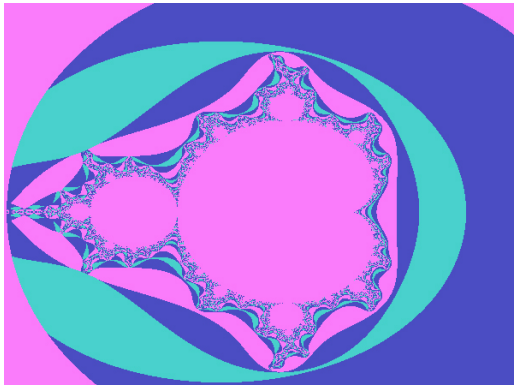


Figure 4. Fractal pattern effect 2
图 4. 分形图案效果 2

当其他参数值保持不变，将迭代公式变换为：

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sin x_n \times x_n - y_n^2 + cx \\ y_{n+1} = 2 \times \tan x_n \times y_n + cy \end{cases} \quad (3)$$

生成的图案如图 5 所示。按照这种方法，可以在迭代公式中引入 sin 函数、cos 函数、tan 函数、log 函数、exp 函数等等对 x 或 y 进行复合处理，极大拓展了生成图案的种类。

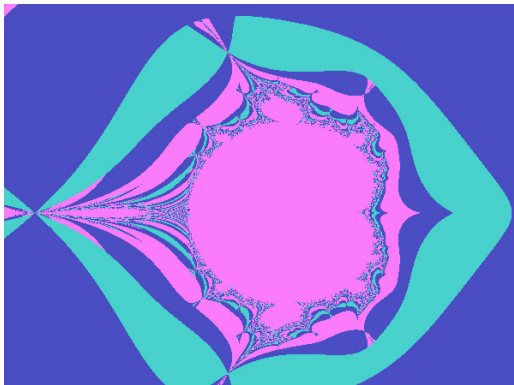


Figure 5. Fractal pattern effect 3
图 5. 分形图案效果 3

当其他参数值保持不变，赋初值 $x_0=1, y_0=1$ 时生成的图案如图 6 所示。可见，使用同样的图案生成算

法, 仅改变参数值, 会得到不同的图案效果。

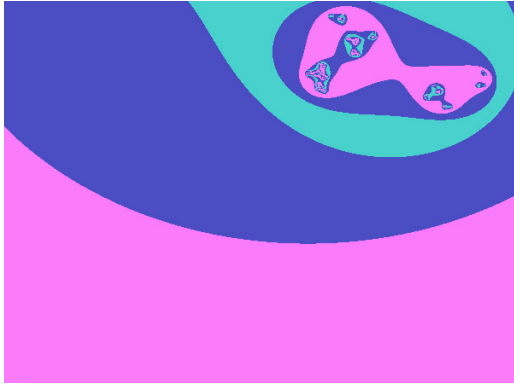


Figure 6. Fractal pattern effect 4

图 6. 分形图案效果 4

5 结论

传统的纺织图案设计过程是人类大脑的一种思维过程, 人们以纸、笔为工具把自己脑海中所能想象出的图案绘制出来。设计作品的风格、质量和数量受到人脑想象力的局限。利用 Mandelbrot 集生成的分形图形具有和谐、对称等美学特点, 向人们展示了在简单的数学模型中蕴涵的内在美、对称性和复杂性。

传统纺织图案大多是典型的欧氏几何图案。欧氏几何的研究范围为规则图形, 如三角形、圆形、矩形、圆锥体等, 构成这些图形的边缘连续而光滑。通过对欧式几何图形进行组合、重复、平移、旋转等, 呈现一种规则的美感。分形图案所呈现出的美感是不规则的。分形图案的复杂性来自简单数学公式的反复迭代, 图形中嵌套图形, 在越来越小的尺度上产生越来越多的细节, 形成无比细致的结构。分形图案这种无限精细的美感特征是传统纺织图案不能表达的。分形图案局部和整体、局部和局部具有某种自相似性, 随着分形层次数目的增加, 这种自相似呈现出一种迷幻感。分形图案有无穷的分叉与缠绕, 看似复杂, 但透露出

一种内在的秩序。

使用相同的 Mandelbrot 集分形图生成算法, 改变设定的参数值, 会得到截然不同的效果。在数字化艺术设计日益发展的今天, 用计算机生成分形图形为纺织图案的设计开创了新的思路。

致 谢

感谢所有对本论文提供帮助的老师和同学们!

References (参考文献)

- [1] Jianyi Wang, Junqiong Wang. Research on the nature of fractal art beauty [J]. *Journal of HIT: Social Sciences Edition*, 2008, 10 (6): 46-51.
王建一, 汪俊琼. 论分形艺术美的本质[J]. 哈尔滨工业大学学报 (社会科学版), 2008, 10 (6): 46-51.
- [2] Shihuang Shao, Zhaofeng Geng. Production of Chaotic and Fractal Patterns in Pattern Preparation System of Computer Controlled Flat Knitting Machine [J]. *Journal of China Textile University*, 1997, 23(1): 56-62.
戚玉簪, 邵世煌, 耿兆丰. 电脑横机花型准备系统中混沌、分形图纹的生成[J]. 中国纺织大学学报, 1997, 23(1): 56-62.
- [3] Yongning Zhang, Yingjin Gan. Complex Plane Fractal and Its Application in Textile Pattern CAD [J]. *Textile Engineering*, 1999, (3): 40-42.
张永宁, 甘应进. 复平面分形在纺织品花型 CAD 中的应用[J]. 纺织导报, 1999, (3): 40-42.
- [4] Xuhong Yang, Donggao Li, Xiaohua Yan, Yu Zhang. Auto-generating of Textile Pattern through Fractal L-System [J]. *Journal of Textile Research*, 2003, 24(3): 193-195.
杨旭红, 李栋高, 颜晓华, 张聿. 基于分形 L 系统的纺织品图案的自动生成[J]. 纺织学报, 2003, 24(3): 193-195.
- [5] Fangrong He, Zhenhua Bao, Dongfang Chen, Guohong Wu. Application of Fractal Art in Textile Pattern Design [J]. *Textile Dyeing and Finishing Journal*, 2007, 29(8): 7-9.
何方容, 包振华, 陈东方, 吴国红. 纺织图案设计中分形艺术的应用[J]. 染整技术, 2007, 29(8): 7-9.
- [6] Qingfang He. Computer Graphics Principles and Algorithm Tutorial [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. 221.
和青芳. 计算机图形学原理及算法教程 (Visual C++版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006. 221.
- [7] Ying Tang, Kuanjun Fang, Lei Shen. Comparison of Beauty Sense between Fractal and Traditional Textile Printing Patterns [J]. *Journal of Textile Research*, 2009, 30(12): 91.
唐颖, 房宽峻, 沈雷. 分形图案与传统纺织印花图案的形式美感对比[J]. 纺织学报, 2009, 30(12): 91.