

Solving Integer Programming Based on Maximum Entropy Particle Swarm Optimization Hybrid Algorithm

Jiajuan Fang, Zhimin Li

Department of modern management, Zhengzhou Occupation Technology College, Zhengzhou, 450121, China

Email: 410399636@qq.com

Abstract: To solve a class of integer programming (IP), this paper proposed a new method called maximum-entropy particles swarm optimization hybrid algorithm. First, integer programming problems were transformed into equivalent non-integer programming (NIP) problems, and a smoothing approximation to the inequality constraints was given by the maximum-entropy function, furthermore, integer programming can be transformed into unconstrained optimization, then using the particles swarm optimization to solve this problem. Numerical results showed that the proposed method is more accurate and effective.

Keywords: particles swarm optimization; integer programming; maximum entropy method

极大熵微粒群混合算法求解整数规划

方加娟, 李志民

郑州职业技术学院现代管理系, 河南郑州, 中国, 450121

Email: 410399636@qq.com

摘 要: 针对整数规划问题, 给出了一个新的算法——极大熵微粒群混合算法。首先通过把整数规划问题都转化成等价的非整数规划问题, 采用极大熵函数对非整数规划的约束条件进行处理, 进而把非整数规划问题化为无约束优化, 利用微粒群算法对其进行求解。计算结果表明, 文中提出的算法在求解的准确性和有效性均优于其它算法。

关键词: 微粒群算法; 整数规划; 极大熵方法

1 引言

整数规划(Integer Programming, IP)和混合整数规划(Mixed Integer Programming, MIP)问题是 20 世纪 60 年代发展起来的规划论中的一个分支, 是数学规划中常见的、复杂的一大类问题^[1], 其广泛应用于许多工程领域, 如资源管理、生产调度、可靠性优化、目标分配、超大规模集成电路设计等。因此如何求解 IP 和 MIP 问题是一个重要的研究领域。许多快速求解非整数规划的算法, 如变尺度法、内点法、罚函数法、信赖域法等^[2-3], 这些算法具有良好的收敛性和收敛速度快等特点, 但是却不能用于求解 IP 和 MIP 问题。多年来的研究表明, 整数规划是数学规划和运筹学中最困难的研究领域之一。即使是形式上看起来很简单的线性约束二次整数规划问题在全空间上求解也是不可判定的, 即不存在求解该问题的算法。整数规划却属于典型的 NP 难解问题, 一般不存在多项式算法^[4]。

近年来随着进化计算的发展, 一种新颖的、简便的进化类算法——微粒群算法(Particle Swarm Optimization, 简称 PSO)^[5-6]。由于其具有算法简单、容易理解、易于实现, 且具有较强的全局寻优能力的特点, 已在许多优化问题中得到了成功的应用^[7-8]。本文通过把整数规划问题都转化成等价的非整数规划问题, 采用极大熵函数对非整数规划的约束条件进行处理, 引入适当的目标函数, 进而把非整数规划问题化为无约束优化, 然后利用 PSO 算法对其进行求解。数值实验结果表明了该方法的正确性和有效性。

2 问题的转化

2.1 整数规划问题都转化成等价的非整数规划

本文仅考虑如下不等式约束的优化问题:

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad h_i(x) \leq 0, i=1, 2, \dots, l, x \in X \end{cases}$$

其中各个分量 $f(x), h_i(x)$ 均为 n 维向量 x 的函数, 如果 X 是整数点集, 则称(P)为整数规划 IP; 如果 X 中部分分量是整数, 则称(P)为混合整数规划 MIP; 如果 X 中所有元素均取 0 或 1 值, 则称(P)为 0-1 规划. 若用两个不等式代替一个等式, 就可以把等式约束转化为不等式约束. 下面我们给出整数规划问题或混合整数规划问题转化为一个等价的非整数规划问题的方法.

由于条件 $x_i \in \{0, 1\}$ 等价与条件 $x_i(1-x_i)=0, 0 \leq x_i \leq 1$, 所以 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 能被转换为一个连续变量. 因此任何一个 0-1 规划问题都可以转化为一个等价的非整数规划问题(NIP), 即等价的 NIP 的最优解也是 0-1 IP 的最优解. 如果在 X 中取整数的变量有界, 不妨设 $0 \leq x_k \leq L$, 那么 x_k 可以表示成一个 2 进制数, 即

$$x_k = y_0 2^0 + y_1 2^1 + \dots + y_s 2^s,$$

其中 $s = [\log_2 L] + 1, y_k = 0$ 或 $1 (k=1, 2, \dots, s)$. 因此整数变量可以转化为仅取 0 或 1 的变量, 于是整数规划就可以转化为等价的 0-1 规划, 结合任何一个 0-1 规划问题都可以转化为一个等价的非整数规划问题(NIP), 因此定理 1 结论成立.

我们还可以给出另一种转化形式来证明定理 1 成立. 设 x_k 是一个有界的整数变量, 即 $x_k \in [a_k, b_k]$ 中的整数, 这里 a_k, b_k 都为整数, 则有下面的非整数规划问题(NIP)

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t. } h_i(x) \leq 0, i=1, 2, \dots, l \\ (x_k - a_k)(x_k - (a_k + 1)) \cdots (x_k - b_k) = 0, k=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

这里给出了 IP 和 MIP 转化为非整数规划的两种方法, 即连续化的方法^[9]. 当转化后的目标函数和约束全部可微时, 我们便可用现有的许多算法求解转化后的问题. 下面结合极大熵方法给出一种将转化后的等价问题进一步化为无约束优化问题的求解方法.

2.2 极大熵方法化非整数规划为无约束优化

这里我们总认为已将整数规划转化为下面的非整数规划问题

$$(NIP1) \begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) \leq 0, i=1, 2, \dots, m \end{cases}$$

显然(NIP1)问题的约束集合等价于极大值等式约束 $g(x) = \max\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)\} \leq 0$, 而函数

$g(x)$ 是不可微的, 因此给一些数值计算上带来了困难. 下面我们引进极大熵函数

$$g_p(x) = (1/p) \ln \sum_{i=1}^m \exp(p g_i(x)),$$

其中 $p > 0$ 为控制参数; 关于极大熵函数的导出读者可以参考文献[10], 极大熵函数也称凝聚函数, 该函数从数学上是以原来函数 $g_i(x)$ 的指数函数构成向量函数的 L_p 范数的自然对数. 先头的指数变换使向量的各分量为正, 后面的对数变换使函数值复原. 简单运算可以证明, 函数 $g(x)$ 与 $g_p(x)$ 具有如下关系:

$$g(x) \leq g_p(x) \leq g(x) + \frac{1}{p} \ln m.$$

由此可知, 只要参数 p 充分大时, 就可以用极大熵函数 $g_p(x)$ 直接代替极大值函数 $g(x)$, 从而将原来的不可微约束问题转化为一个可微的优化问题. 虽然 p 取有限值时仅能得到原问题的近似解, 但只要 p 取得适当大就能保证很高的精度. 为了避免计算 p 过大出现上溢, 我们可取如下 $g_p(x)$ 的等价形式

$$g_p(x) = g(x) + \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^m \exp\{p[g_i(x) - g(x)]\}, (p > 0).$$

于是问题(NIP1)转化为如下约束优化问题(NIP2)

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t. } g_p(x) = (1/p) \ln \sum_{i=1}^m \exp(p g_i(x)) \leq 0 \end{cases}$$

采用乘子罚函数法进行求解, 问题(NIP2)可以转化为下列无约束优化问题(NP)

$$\min \Phi_p(x, \alpha) = f(x) + \alpha g_p(x) + c g_p^2(x) / 2$$

这里 α 为拉格朗日乘子, c 为惩罚因子, α 值按照 $\alpha^{k+1} = \alpha^k + c g_p(x^k)$ 进行修正.

下面我们考虑用微粒群算法 (PSO) 求解无约束优化问题 $\min \Phi_p(x, \alpha)$.

3 微粒群算法的描述

微粒群算法源于对鸟群觅食行为的研究. 研究者发现鸟群在飞行中经常会突然改变方向; 散开, 聚集, 其行为不可预测, 但其整体总保持一致性, 个体和个体间也保持着最适宜的距离. 通过对类似生物群体行为的研究, 发现生物群体中存在一种社会信息共享机制, 它为群体的进化提供了一种优势, 这也是微粒群算法形成的基础.

假设在一个 S 维的目标搜索空间中, 有 m 个粒子组成一个群体, 其中第 i 个粒子表示为一个 S 维的向量 $\vec{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iS})$, $i = 1, 2, \dots, m$, 即第 i 个粒子在 S 维搜索空间中的位置(每个粒子的位置就是一个潜在的解)。将 $\vec{x}_i$ 代入一个目标函数就可以算出其适应值, 根据适应值的大小衡量解的优劣。第 i 个粒子的飞翔的速度是 S 维向量, 记为 $\vec{V} = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iS})$ 。记第 i 个粒子迄今为止搜索到的最优位置为 $\vec{P}_{is} = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iS})$, 整个微粒群迄今为止搜索到的最优位置为 $\vec{P}_{gs} = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gS})$ 。

Kennedy 和 Eberhart 最早提出的微粒群算法采用下列公式对粒子操作:

$$v_{is}^{t+1} = v_{is}^t + c_1 r_1 (p_{is} - x_{is}^t) + c_2 r_2 (p_{gs} - x_{is}^t) \quad (1)$$

$$x_{is}^{t+1} = x_{is}^t + v_{is}^t \quad (2)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, \dots, S$; 学习因子 c_1 和 c_2 是非负常数; r_1 和 r_2 为伪随机数, 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。 $v_{is} \in [-v_{\max}, v_{\max}]$, $v_{\max}$ 为常数, 由用户设定。

Y. Shi 和 Eberhart 在 1998 年对式 (1) 作了如下改进^[11]:

$$v_{is}^{t+1} = \omega v_{is}^t + c_1 r_1 (p_{is} - x_{is}^t) + c_2 r_2 (p_{gs} - x_{is}^t) \quad (3)$$

在式 (3) 中 ω 为非负数, 称为动力常量, 控制着前一速度对当前速度的影响, ω 较大时, 前一速度影响较大, 全局搜索能力较强; ω 较小时, 前一速度影响较小, 局部搜索能力较强。通过调正 ω 的大小来跳出局部极小值。迭代终止条件根据具体问题一般选为最大迭代次数或微粒群迄今为止搜索到的最优位置满足的预定最小适应阈值。更多的微粒群算法, 可以参考文献[11-12]。

4 极大熵微粒群混合算法求解整数规划

对给定的整数规划, 构造相应的适应度函数 $\min \Phi_p(x, \alpha)$, 应用微粒群算法来求解该无约束优化问题。

求解整数规划问题的微粒群算法

步骤 1 初始化一个规模为 N 的微粒群, 设定初始位置和速度;

步骤 2 计算每个粒子的适应值;

步骤 3 对每个粒子将其适应值和其经历过的最好位置 P_{is} 的适应值进行比较, 若较好, 则将其作为当前的最好位置;

步骤 4 对每个粒子将其适应值和全局经历过的最好位置 P_{gs} 的适应值进行比较, 若较好, 则将其作为当前的全局最好位置;

步骤 5 根据方程式 (2), (3) 分别对粒子的位置和速度进行进化;

步骤 6 如果满足终止条件, 则输出解; 否则返回步骤 2。

5 数值实验

为了测试本文算法的求解性能, 下面我们取文[9]中非线性整数规划问题做测试, 并和文[9]的结果进行比较。

算例 1 (本例在文献[9]中用作测试函数)

$$\begin{cases} \min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 4)^2 \\ s.t. \quad -x_1 + x_2 + x_3 \leq 3.5 \\ \quad \quad x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \text{ 为 } \geq 0 \text{ 的整数} \end{cases}$$

容易求的 $0 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 3.5$, $0 \leq x_3 \leq 3.5$, 因此该整数规划可以转化为如下非整数规划:

$$\begin{cases} \min f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 4)^2 \\ s.t. \quad -x_1 + x_2 + x_3 \leq 3.5 \\ \quad \quad x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ \quad \quad x_1(x_1 - 1)(x_1 - 2) \cdots (x_1 - 6) = 0 \\ \quad \quad x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2)(x_2 - 3) = 0 \\ \quad \quad x_3(x_3 - 1)(x_3 - 2)(x_3 - 3) = 0 \end{cases}$$

采用上述方法进行求解, 取参数 $p = 1 \times 10^6$. 学习因子 $c_1 = c_2 = 1.8$, ω 从 1.0 减小到 0.4, 群体规模数为 20, 最大进化代数为 1000, 用 Matlab6.5 编程, 算法运行 100 次, 取平均值, 结果如表 1 所示. 为便于比较, 表 1 也给出了文献[9]的求解结果。

Table 1. Comparison of results
表 1. 计算结果的比较

算法	参数 p	初始点 x^0	最优解 x^*	$f(x^*)$
文献[9]	-/-	(8, 8, ..., 8)	(2, 2, 3)	2
本文	1×10^6	-/-	(1, 1, 3) 搜到 48 次 (2, 2, 3) 搜到 52 次	2.000 107 2.001 308

数据分析: 因为文献[9]都是确定性算法, 因此文献[9]只能获得初始点附近的一组解. 结合表 1 可以看出: 本文的结果整体比文献[9]好, 算例 1 的两组解 $x_1^* = (1, 1, 3)^T$; $x_2^* = (2, 2, 3)^T$ 都搜索到了, 且本文算法的精确度高. 已有文献中只得到了该问题的一个解, 主要是因为确定性算法是用给定初始点进行搜索的, 因此无法同时搜到原问题的所有可能解, 而本文算法中的初始点是随机的, 因此通过 100 次搜索就有可能获得原问题尽可能多的最优解.

6 结束语

本文通过把整数规划问题都转化成等价的非整数规划问题, 结合极大熵函数法, 给出了此类问题的一种新的有效算法——极大熵微粒群混合. 利用本文提出的极大熵微粒群算法进行计算, 在计算的成功率和准确性方面明显优于文献[7-9]中的算法, 并且当参数 p 适当大时, 可以得到与理论值一致的结果, 可见, 利用极大熵微粒群算法求解整数规划, 可使算法简单直观, 容易计算, 且计算的准确性, 成功率高. 在实际中, 许多问题的变量都是有界的, 但有时变量有界明确给出, 因此, 我们可以通过约束来求出或估计变量的上下界, 一般很容易求出线性整数规划的变量的界. 对于无界变量的 IP 和 MIP 问题还有待于进一步研究.

References (参考文献)

- [1] 卢开澄. 单目标, 多目标与整数规划[M]. 清华大学出版社, 1999.
- [2] TANG Huanwen, QIN Xuezh. Practical Methods of Optimization [M]. DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS, 2000.
- [3] 唐焕文, 秦学志. 实用最优化方法[M]. 大连理工大学出版社, 2000.
- [4] Practical linear programming [M]. Beijing: Science Press, 1981. 希梅尔布劳 D M. 实用非线性规划(中译本)[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [5] XIN Wenxun, XIE Jinxing. Modern optimization method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999. 邢文训, 谢金星. 现代优化计算方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [6] J. Kennedy, R. Eberhart. Particle Swarm Optimization [C]. In: Proc IEEE Int Conf on Neural Networks, 1995: 1942-1948.
- [7] Eberhart R C, Hu X. Human tremor analysis using particle[M]. Washington: Proceeding of the IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC1999). IEEE Press, 1999: 1927-1930.
- [8] LIU Zhao, KANG Lishan, JIANG Liangxiao et al. New PSO Algorithm for MINLP Problems [J]. MINI-MICRO SYSTEMS, 2005, 26(6): 991-994. 刘钊, 康立山, 蒋良孝等. 用粒子群优化改进算法求解混合整数非线性规划问题[J]. 小型微型计算机系统, 2005, 26(6): 991-994.
- [9] TAN Ying, GAO Huimin, ZENG Jianchao. Particle Swarm Optimization for Integer Programming [J]. SYSTEMS ENGINEERING—THEORY & PRACTICE, 2004, 24(5): 126-129. 谭瑛, 高慧敏, 曾建潮. 求解整数规划问题的微粒群算法[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(5): 126-129.
- [10] MENG Zhiqing, HU Qiying, YANG Xiaoqi. A method of non-linear penalty function for solving integer programming and mixed integer programming [J]. CONTROL AND DECISION, 2002, 17(3): 310-315. 孟志青, 胡奇英, 杨晓琪. 一种求解整数规划与混合整数规划非线性罚函数方法[J]. 控制与决策, 2002, 17(3): 310-315.
- [11] 李兴斯. 一类不可微优化问题的有效解法[J]. 中国科学(A 辑), 1994, 4: 371-377.
- [12] ZENG Jianchao, JIE Qian, CUI Zhihui. Particle Swarm Optimization [M]. Beijing: Science Press, 2004. 曾建潮, 介倩, 崔志华. 微粒群算法[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [13] XIE Xiaofeng, ZHANG Wenjun, YANG Zhilian. Overview of particle swarm optimization [J]. CONTROL AND DECISION, 2003, Vol18, No2, 129-134. 谢晓峰, 张文俊, 杨之廉. 微粒群算法综述[J]. 控制与决策, 2003, Vol18, No2, 129-134.