Solving Nonlinear Equations Based on Maximum Entropy Harmony Search Hybrid Algorithm

Cui Huixia
Department of Modern Management, Zhengzhou Occupation Technology College, Zhengzhou 450121, China
Email: *chinaxjp@yahoo.com.cn*

Abstract: To solve nonlinear equations, this paper presents a very efficient method, referred to as maximum-entropy harmony search algorithm. First, nonlinear equations problem was be transformed to non-differentiable optimization, and using the smooth aggregate function to instead of maximum function in non-differentiable optimization problem, Thereupon, the primal problem can be transformed into unconstrained optimization, then using the harmony search algorithm to solve this problem. Two examples were used to demonstrate the validity of the method and the results were compared with the ones of other methods. It is showed that the proposed method is more accurate and effective.

Keywords: nonlinear equations; maximum-entropy; harmony search algorithm

基于极大熵和声搜索混合算法的非线性方程组求解

崔慧霞
郑州职业技术学院现代管理系, 河南郑州, 450121
Email: chinaxjp@yahoo.com.cn

摘　要：针对非线性方程组，本文给出了一个新的算法。首先把非线性方程组转化为一个不可微优化问题，然后用一个称之为凝聚函数的光滑函数直接代替不可微的极大值函数，从而可把非线性方程组的求解转化为无约束优化问题，然后利用和声搜索算法对其进行求解。利用 2 个测试函数对其进行测试并与其它算法进行比较。计算结果表明，本文提出的算法在求解的准确性和有效性均优于其它算法。

关键词：非线性方程组；极大熵；和声搜索算法

1 引言

求解非线性方程组是科学技术和工程应用中的常见问题。非线性方程组的解法长期以来是数学和工程应用中的一个重要的研究内容。很多实际问题的数学模型最终都归结为求解形如 $F(x)=0$ 的非线性方程组，求解非线性方程组的常用方法是牛顿法。牛顿法的收敛性和性能特征在很大程度上依赖于初始点，在适当的条件需下，该方法具有二阶收敛速度。牛顿法对迭代初始值的要求相相当苛刻，如果初始值不在牛顿迭代的收敛域内，该方法失效。但是对于很多非线性方程组，选择好的初始点是一件非常困难的事情；鉴于牛顿法的缺点，文献[1]结合遗传算法和经典算法的优点，提出了一种用于求解非线性方程组的混合遗传算法。该混合算法充分发挥了遗传算法的群体搜索和全局收敛性，有效地克服了经典算法的初始点敏感问题；同时在遗传算法中引入经典算法(Powell 法、拟牛顿迭代法)作局部搜索，克服了遗传算法收敛速度慢和精度差的缺点。文献[2]探讨了用模拟退火算法求解非线性方程及方程组的方法，该方法把方程组求解问题转化为函数优化问题。文献[3]提出了一种求解线性和非线性方程组的通用算法——蒙特卡罗算法。关于各种求解非线性方程组的智能算法正在不断的发展当中，随着计算机技术的发展，相信会有更多更好的智能算法出现。

2001 年, Geem 等人通过类比音乐创作和优化问题的相似性而提出了一种新的智能优化算法——和声搜索(Harmony Search, HS)算法[4]. 与其他进化算法相比, HS 算法机理简单,易于理解,解的构造方式新颖,易于编程计算,且只有少数参数需要调整. 目前已经成功应用于如函数优化、管道铺设、TSP 问题、岩土工程、结构设计、交通路径以及环境参数校正等领域,

978-1-935068-40-2

[5-7]在有关问题上展示了较遗传算法、模拟退火算法和禁忌搜索更好的性能[4],显示了这种算法具有较强的鲁棒性和广泛的应用前景.

本文结合不可微优化问题及和声搜索算法的特点，提出了一个新的求解方法——极大熵和声搜索混合算法，即通过凝聚函数[8]，引入适当的目标函数(适应值函数)，然后利用和声搜索对其进行求解. 数值实验结果表明了该方法的正确性和有效性。

2 极大熵方法

考虑非线性方程组 $F(x)=0, x\in D\subseteq R^n$，其中 $F(x)=\left(f_1(x), f_2(x),\cdots,f_m(x)\right)^T, f_i:R^n\to R$ 是连续可微的实值函数。若用 $\|\bullet\|_p$ 表示向量空间 $p-$ 范数，于是非线性方程组可以转化为求解

$$\min_{x\in R^n}\|F(x)\|_p$$

取 $p=2$，即为一个非线性最小二乘问题 $\min\sum_{i=1}^m f_i^2(x)$，关于该问题的求解，方法已经很多，读者可以参考相关文献；本文我们取 $p=\infty$，则上述问题转化为

$$\min_{x\in R^n}\max_{1\le i\le m}\left\{|f_i(x)|\right\}$$

记 $f(x)=\max_{1\le i\le m}\left\{|f_i(x)|\right\}$，因此原非线性方程组问题就转化为求解优化问题 $\min_{x\in R^n} f(x)$；一般情况下，函数 $f(x)$ 是不可微的，这给一些数值计算上带来了困难。下面我们引进极大熵函数 $F_p(x)=\frac{1}{p}\ln\left\{\sum_{i=1}^m \exp\left[p|f_i(x)|\right]\right\}$，其中 $p>0$ 为控制参数；关于极大熵函数的导出读者可以参考文献[8-9]，熵函数也称凝聚函数，本文我们称其为凝聚函数。该函数从数学上是以原来函数 $f_i(x)$ 绝对值的指数函数构成向量函数 L_p 范数的自然对数。先头的指数变换使向量的各分量为正，后面的对数变换使函数值复原。

下面我们证明，当 p 趋于无穷大时，$F_p(x)$ 在整个空间上一致逼近 $f(x)$。

命题 1 $f(x)\le F_p(x)\le f(x)+\frac{1}{p}\ln m$。

证明 把 $F_p(x)$ 改写成等价形式

$$F_p(x)=f(x)+\frac{1}{p}\ln\sum_{i=1}^m \exp\left\{p\left[|f_i(x)|-f(x)\right]\right\},$$

很显然，

$$|f_i(x)|-f(x)\le 0,\ 1\le i\le m,$$

且其中至少有一个等于零，因此有

$$1\le\sum_{i=1}^m \exp\left\{p\left[|f_i(x)|-f(x)\right]\right\}\le m,$$

从而有

$$0\le F_p(x)-f(x)\le\frac{1}{p}\ln m,$$

即

$$f(x)\le F_p(x)\le f(x)+\frac{1}{p}\ln m。$$

命题 2 $F_p(x)$ 的值随参数 p 的增加而单调下降，且当 p 趋于无穷大时 $F_p(x)$ 以 $f(x)$ 为极限。

证明 设向量函数 $\psi(x)$，它的分量分别为 $|f_i(x)|$ 的指数函数，即 $\psi_i(x)=\exp\left[|f_i(x)|\right]$，$i=1,2,\cdots,m$。因其分量皆为正值，故它的 L_p 范数可直接定义为：

$$\|\psi(x)\|_p=\left\{\sum_{i=1}^m\left[\psi_i(x)\right]^p\right\}^{1/p}=\left\{\sum_{i=1}^m\exp\left[p|f_i(x)|\right]\right\}^{1/p},$$

其中 $p\ge 1$。对上式两边取对数，即可得到

$$\ln\|\psi(x)\|_p=\frac{1}{p}\left\{\sum_{i=1}^m\exp\left[p|f_i(x)|\right]\right\},$$

等式的右端就是凝聚函数，因此我们有 $F_p(x)=\ln\|\psi(x)\|_p$。由 Jensen 不等式[10]，若 $q\ge p\ge 1$，即有 $\|\psi(x)\|_p\ge\|\psi(x)\|_q$，两边取自然对数，立刻得到 $F_p(x)\ge F_q(x)$，这就完成了单调性的证明。

向量值函数 $\psi(x)$ 的 L_∞ 范数为

$$\|\psi(x)\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|\psi(x)\|_p=\max_i\psi_i(x),$$

从而有

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}F_p(x)&=\lim_{p\to\infty}\ln\|\psi(x)\|_p=\ln\left[\max_{1\le i\le m}\psi_i(x)\right]\\&=\max_{1\le i\le m}\ln\left[\psi_i(x)\right]=\max_{1\le i\le m}\{|f_i(x)|\}=f(x)\end{aligned}。$$

[注] 该命题说明凝聚函数 $F_p(x)$ 随着 p 的增大从上方逼近 $f(x)=\max_{1\le i\le m}\left\{|f_i(x)|\right\}$。

因此，在实际计算时，可将 p 取得足够大，然后用可微函数 $F_p(x)$ 代替不可微函数 $f(x)$，从而将不可微优化问题 $\min_{x\in R^n} f(x)$ 的求解变换成一个易于求

解的可微优化问题 $\min_{x\in R^n} F_p(x)$ 。因此，利用上述凝聚函数的性质，非线性方程组问题就可以转化为无约束优化问题 $\min_{x\in R^n} F_p(x)$，下面我们给出求解该无约束优化的和声搜索算法。

3 和声搜索算法的描述

和声搜索算法是最近出现的一种启发式全局搜索算法，在音乐演奏中，乐师们凭借自己的记忆，通过反复调整乐队中各乐器的音调，最终达到一个美妙的和声状态。Z. W. Geem 等[8]受这一现象启发，将乐器i (i =1,2,…,m)类比于优化问题中的第i个设计变量，各乐器声调的和声R_j (j =1 ,2,…,M)相当于优化问题的第j个解向量，评价类比于目标函数。算法首先产生M个初始解(和声)放入和声记忆库HM (harmony memory)内，以概率HR在HM内搜索新解，以概率1–HR在HM外变量可能值域中搜索。然后算法以概率PR对新解产生局部扰动。判断新解目标函数值是否优于HM内的最差解，若是，则替换之；然后不断迭代，直至达到预定迭代次数T_{max}，其计算步骤如下所示：

(1)首先随机产生M个和声$R_1,R_2,\dots,R_M$放入和声库中，其中$R_i=(r_{i1},r_{i2},\dots,r_{im})$,m为设计变量个数，给定最大迭代次数$T_{\max}$，迭代次数计数器ite=0 。以下(2)～(4)步骤产生一个新解R_{new}。

(2) For j = 1 to m

(3) 随机产生一个$[0,1]$之间的数$rnd1$，若$rnd1\le HR$，则从$(r_{1j},r_{2j},\dots,r_{Mj})$中随机选取一个值作为新解的第$j$个变量值$r_{new,j}$，若$rnd1>HR$，则在变量的取值范围内随机产生一个值作为$r_{new,j}$；然后再随机生成$[0,1]$之间的数$rnd2$，若$rnd2\le PR$，则对$r_{new,j}$ 产生随机扰动，得到$r'_{new,j}$， 否则$r'_{new,j}=r_{new,j}$。

(4) next j

(5)评价新解$R_{new}=(r'_{new,1}, r'_{new,2}, \dots, r'_{new,m})$是否优于和声库中最差的和声$R_b$ ，若是，则利用新解替换它，否则保持和声库中和声不变；

(6) $ite = ite +1$，若$ite<T\max$，转步骤(2)，否则输出和声中最好解，计算结束。

任何一种全局优化方法都必须协调好对解空间的开发与探索两种能力。若过分强调算法的开发能力，则算法容易陷入局部最优，反之，若过分强调算法的探索能力，则算法就成为盲目的随机搜索。和声算法通过引入 HR 与 PR 两个参数，以期达到算法对解空间开发、探索能力的平衡，但是如何取值，却无理论基础。Z. W. Geem 等[11-12]认为 HR 应该取较大值，PR 取较小值，这与遗传算法中的交叉概率与变异概率的取值规律类似。

4 极大熵和声搜索混合算法

step1 由给定的非线性方程组，构造相应的凝聚函数

$$F_p(x)=\frac{1}{p}\ln\left\{\sum_{i=1}^{m}\exp\left[p\left|f_i(x)\right|\right]\right\};$$

step2 令 p 是一个充分大的常数，用和声搜索算法求解 $\min_{x\in R^n} F_p(x)$ 。

说明：（1）为了防止计算中出现溢出现象，这里我们取优化目标函数为凝聚函数 $F_p(x)$ 的等价形式

$$F_p(x)=f(x)+\frac{1}{p}\ln\sum_{i=1}^{m}\exp\left\{p\left[\left|f_i(x)\right|-f(x)\right]\right\}$$

（其中 p 是一个充分大的给定常数）。（2）解得精度完全由参数 p 来控制，且解对参数 p 的变化不敏感，仅一次优化即可求得原问题较好的解。

5 数值实验

本文中的参数 $p=1000$，M=5, 和声记忆库的大小 HM=100 , 和声记忆保留概率 HR=0. 95 ,记忆扰动概率 PR =0. 5 ;选取 5000 为最大迭代次数。以下两个算例选自文献[13]，算法运行 50 次，取平均值。

算例 1.

$$\begin{cases} f_1(x)=(x_1-5x_2)^2=0\\ f_2(x)=(x_2-2x_3)^2=0\\ f_3(x)=(3x_1+x_3)^2=0 \end{cases}$$

其中：

$$-1\le x_1,x_2,x_3\le 1$$

算例 2.

$$\begin{cases} f_1(x)=x_1^2-x_2-1=0\\ f_2(x)=(x_1-2)^2+(x_2-0.5)^2-1=0 \end{cases}$$

其中：

$x\in[0,2]$，精确解为：

$$x^*=(1.546342,1.391174)^T,$$

$$x^*=(1.067412,0.139460)^T$$

以上算例的计算结果见表 1。

从表 1 的计算结果可以看出，利用本文提出的极大熵和声搜索算法进行计算，在计算的成功率和准确性方面明显较优于文[1-3]中的算法，并且当参数 p 适当大时，可以得到与理论值一致的结果，可见，利用极大

978-1-935068-40-2 © 2010 SciRes.

熵和声搜索算法求解非线性方程组，可使算法简单直观，容易计算，且计算的准确性，成功率高。

Table 1. Numerical results for nonlinear equations using maximum entropy harmony search algorithm
表 1. 极大熵和声搜索算法解非线性方程组的数值结果

	搜到解次数	成功率	计算得到的 x （取平均值）
算例 1	50	1	(-0.000002; -0.000001; -0.000004)
算例 2	50	1	(1.546513; 1.391146) 搜到 31 次

References (参考文献)

[1] TIAN Qiao-yu, GU Zhong-bi, ZHOU Xin-zhi. Solving Systems of Nonlinear Equations with Hybrid Genetic Algorithm[J]. COMPUTER TECHNOLOGY AND DEVELOPMENT, 2007, Vol.17,No.3,10-12.
田巧玉,古钟璧,周新志,基于混合遗传算法求解非线性方程组[J]. 计算机技术与发展,2007,Vol.17,No.3,10-12.

[2] XU Xiaoyong, ZHANG Haifang, ZHONG Taiyong. Simulated Annealing Algorithm for Solving Nonlinear Equation and System [J]. AERONAUTICAL COMPUTING TECHNIQUE, 2007, Vol.37,No.1,44-46.
许小勇,张海芳,钟太勇,求解非线性方程及方程组的模拟退火算法[J]. 航空计算技术,2007,Vol.37, No.1,44-46.

[3] CHENG Jin-rong, DING Zhen-feng, WANG Zhi, An all-purpose algorithm for solving linear and nonlinear system of equations[J]. JOURNAL OF ANHUI UNIVERSITY (NATURAL SCIENCES) ,2008,Vol.32,No.2,48-51.
程锦荣,丁振锋,汪志等,求解线性和非线性方程组的一种通用算法[J]. 安徽大学学报,2008,Vol.32,No.2,48-51.

[4] GEEM ZW, KIM J H, LOGANATHAN G V. A new heuristic optimization algorithm: harmony search [J]. Simulation, 2001, 76 (2) : 60-68.

[5] KANG S L, GEEM ZW. A new structural optimization method based on harmony search algorithm [J]. Computers and Structures, 2004, 82 (9-10) : 781-798.

[6] GEEM ZW, LEE K S, PARK Y. Application of harmony search to vehicle routing[J]. American Journal of Applied Sciences, 2005, 2 (12) : 1552 - 1557.

[7] MAHDAV IM, FESANGHARYM, DAMANGIR E. Animproved harmony search algorithm for solving optimization problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188 (2) : 1567 - 157.

[8] 李兴斯.解非线性规划的凝聚函数法[J]. 中国科学(A 辑) . 1991, 12 :1283-1288.

[9] 李兴斯.一类不可微优化问题的有效解法[J]. 中国科学(A 辑) . 1994, 4 :371-377.

[10] KUANG Jichang, Inequalities[M]. Jinan: Shandong Science & Tchnology Press,2004
匡继昌,常用不等式（第三版）[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2004.

[11] KIM J H, GEEM ZW, KIM E S. Parameter estimation of the nonlinear muskingum model using harmony search [J]. Journal of the AmericanWater ResourcesAssociation, 2001, 37 (5): 1131 - 1138.

[12] GEEM ZW, LEE K S, PARK Y. Application of harmony search to vehicle routing [J]. American Journal of Applied Sciences, 2005, 2 (12): 1552 - 1557.

[13] SHI Miaogen, GU Lizhen, The basis of scientific and engineering computing[M].Beijing: Tsinghua Univeristy Press,1999
施妙根,顾丽珍, 科学和工程计算基础[M].北京: 清华大学出版社,1999.