

Obtaining Spectrum of Textile Image by Orthogonal Transform

Lingrui Dai, Jianyun Liu

Tianjin Polytechnic University, Tianjin, China

Email: dailingrui@yahoo.cn

Abstract: In the image processing of extracting textile density information, the image in image domain can be transformed into other spaces. And then the image is processed by the feature of these spaces. At last, the results of image processing are converted to original space from transforming domain. So images are processed and analyzed effectively and objectively. According this method, our expected results can be achieved. The transform from one space to another is just transform processing of image. Now, the widely used method of image processing based transform is linear orthogonal transform. Combined Fourier transform and other physical explanation, some related image processing problems will be resolved.

Keywords: image transform; linear orthogonal transform; Fourier transform

利用图像正交变换技术获得织物图像频谱图

戴凌瑞, 刘剑云

天津工业大学, 天津, 中国

Email: dailingrui@yahoo.cn

摘要: 在织物密度信息提取的图像处理过程中, 通常可以将原本定义在图像域的图像通过某种形式的变换转换到其他空间, 再根据这些空间的一些特有性质对图像进行特殊处理, 并将处理后的结果再从变换域反变换回空间域, 从而更有效、更有针对性地对图像进行分析和处理, 最终达到预期的效果。从一个空间域到另一个空间域的变换就是图像的变换处理, 现有的图像变换处理方法中普遍采用的一种方式就是线形正交变换。通过将 Fourier 变换理论与其物理解释相结合, 将大大有助于图像处理中有关问题的解决。

关键词: 图像变换处理方法; 线形正交变换; Fourier 变换

在织物密度信息提取的图像处理过程中, 通常可以将原本定义在图像域的图像通过某种形式的变换转换到其他空间, 再根据这些空间的一些特有性质对图像进行特殊处理, 并将处理后的结果再从变换域反变换回空间域, 从而更有效、更有针对性地对图像进行分析和处理, 最终达到预期的效果。从一个空间域到另一个空间域的变换就是图像的变换处理, 现有的图像变换处理方法中普遍采用的一种方式就是线形正交变换。

Fourier 变换是线形系统分析的一个重要工具。可有效地对数字化系统、采样点, 电子放大器、卷积滤波器以及噪声效应等进行定量分析。通过将 Fourier 变换理论与其物理解释相结合, 将大大有助于图像处理中有关问题的解决。由于数字图像处理中处理的对象都是二维离散的数据阵列, 因此需要通过二维的离散 Fourier 变

换来进行最终的处理。

一、Fourier 变换的数学基础

Fourier 变换在数学上有着严格的定义, 对于一维连续函数 $f(x)$, 如果能满足狄里赫莱条件: 具有有限个间隔点; 具有有限个极点并且绝对可积, 那么就可以定义其 Fourier 变换为:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi jux) dx \quad (1)$$

其中 u 为频率变量, $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $j = \sqrt{-1}$ 。从上式可以看出,

Fourier 变换是由一个有 n 个实变量的复函数变换为另一个有 n 个实变量的复函数。

为在数字图像系统中应用 Fourier 变换, 就必须引入离散 Fourier 变换 (Discrete Fourier Transform, DFT) 的概念。假设在某一区间 $[x_0, x_1]$ 上等间距地取 $f(x)$ 的 N 个离散值 $\{f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), \dots, f(x_0 + (N-1)\Delta x)\}$, 其中 $\Delta x = (x_1 - x_0)/(N-1)$ 。由于 $f(x)$ 的离散形式为 $f(x) = f(x_0 + x\Delta x) \quad (x = 0, 1, 2, \dots, N-1)$ (2)

可以得到离散的 Fourier 变换:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp(-2\pi j u x / N) \quad (3)$$

$x = 0, 1, 2, \dots, N-1$

根据 Fourier 积分定理可知, Fourier 变换的逆变换一定存在, 而且这个逆变换就是函数 $f(x)$ 本身, 即

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp(2\pi j u x / N) \quad (4)$$

其中 $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

另外, 因为图像是二维的, 如果使用 Fourier 变换进行频谱分析处理数字图像, 必须引入二维 Fourier 变换。设函数 $f(x, y)$ 是连续可积的, 则 Fourier 变换定义为:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-2\pi j (u x + v y)] dx dy \quad (5)$$

其中的 u, v 是频率变量, $j = \sqrt{-1}$ 。

数字图像作为离散的二维数据阵列, 应对此二维连续的图像进行等间距网格采样量化, 可以得到一个 $M \times N$ 的离散图像阵列 $f(x, y)$, 用离散序列中的求和来近似连续序列中的积分, 可以得到二维空间下的离散 Fourier 变换:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-2\pi j (u x / M + v y / N)] \quad (6)$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1$$

$$\text{其中 } v = 0, 1, \dots, n-1$$

对于上式的直观理解是: 指数项 $\exp[-2\pi j (u x / M + v y / N)]$ 为一个在 x 方向具有 M/u , 在 y 方向具有 N/v 的空间频率的基本模式, $F(u, v)$ 显示出这个模式在 $f(x, y)$ 中所含的份量。例如, 图像 $f(x, y)$ 在 θ 方向具有周期为 L 的特性时, 那么它的 Fourier 变换就会在 $u = M/L \cos \theta, v = N/L \sin \theta$ 附近存在较高的值。

Fourier 变换的平方值 $|F(u, v)|^2$ 称为能量频谱, 它显示在图像 $f(x, y)$ 中所含具有 $M/u, N/v$ 周期性的份量。

二维 Fourier 变换的逆变换由下式给出:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[2\pi j (u x / M + v y / N)] \quad (7)$$

从公式 (5) 和公式 (7) 可以看出, 如果先对图像 $f(x, y)$ 求 Fourier 变换 $F(u, v)$, 在频率图像 $F(u, v)$ 上进行某些滤波处理后, 再由逆变换返回到 $f(x, y)$, 即可在 $f(x, y)$ 图像上到处理后的结果。

如果用公式 (3) 来计算一维 Fourier 变换, 所需的复数乘法与加法的次数正比于 N^2 , 运算量是相当惊人的, 为了便于算法的实现, 通常使用现在的快速 Fourier 变换 (Fast Fourier Transform, FFT) 算法。此算法的复数乘法和加法次数正比于 $N \log_2 N$, 因此在 N 值较大时计算量将显著减小。

一维 Fourier 变换可写成下述形式:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux} \quad (8)$$

$$\text{其中: } W_N = \exp(-2\pi j / N) \quad (9)$$

假定 $N = 2^n$, n 为正整数, 则 N 可表示为:

$$N = 2M \quad (10)$$

这里 M 也是正整数。把公式 (4-10) 代入公式 (4-8), 有

$$F(u) = \frac{1}{2M} \sum_{x=0}^{2M-1} f(x)W_{2M}^{ux} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x)W_{2M}^{u(2x)} + \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)W_{2M}^{u(2x+1)} \right\} \quad (11)$$

从式 (4-9) 可得 $W_{2M}^{2ux} = W_M^{ux}$, 所以公式 (4-11) 可变为:

$$F(u) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x)W_M^{ux} + \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)W_M^{ux}W_{2M}^u \right\} \quad (12)$$

如果定义:

$$\begin{aligned} F_{even}(u) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x)W_M^{ux}, \\ F_{odd}(u) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)W_M^{ux} \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, 则式 (12) 可改写为:

$$F(u) = [F_{even}(u) + F_{odd}(u)W_{2M}^u] / 2 \quad (14)$$

又因 $W_M^{u+M} = W_{2M}^u$, $W_{2M}^{u+M} = -W_{2M}^u$, 由公式 (13) 和公式 (14) 可以得到

$$F(u+M) = [F_{even}(u) - F_{odd}(u)W_{2M}^u] / 2 \quad (15)$$

公式 (14) 和公式 (15) 指出, N 点的 Fourier 变换可以分成两个 $N/2$ 点的 Fourier 变换来计算。

二、织物图像的频谱图

通过 FFT 技术, 可将织物图像的二维灰度分布变换为对应的二维空间频域中的频谱。织物的灰度图在纵横向有周期性的灰度分布在频谱图中很好地反映出来,

而在这些有周期性的灰度分布中, 包含了针织物的纵横密度信息。

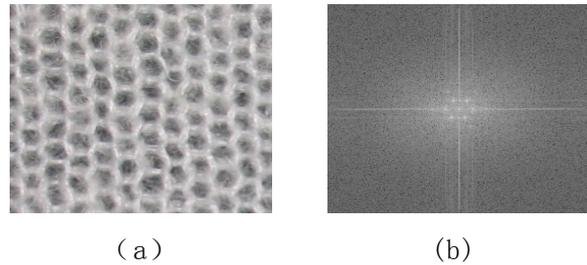


图 1 织物原图与频谱图

实际的操作过程是: 首先对图像进行前期的预处理, 比如直方图变换、噪声平滑等处理, 然后通过 FFT, 可以很快的得到织物频谱图, 见图 1。其中 (a) 图为织物的 256 级灰度图, (b) 图为其频谱图, 从图中可以看到灰度相对较高(较亮)的是峰点, 同时还可以看到有许多灰度相对较低(较暗)的点即噪声, 其中在水平方向和垂直方向上最接近中心点的峰点, 就是要提取的纵行和横列的频率。从图(b)中可以看到在横向有明显的亮带, 在纵向也有明显的亮带, 这便是要提取的信息。

References (参考文献)

- [1] Ravandi S A H, Tonrumi K. Fourier transform analysis of plain woven fabric appearance. *Textile Res J*, 1995, 65(11): 676-683.
- [2] Xu R. Identifying fabric structures with fast fourier transform techniques. *Textile Res J*, 1996, 66(8): 496-506.
- [3] Xin Binjie, Yu Xufen, Wu Zhaoping. Automatic Measurement of the Yarn Density of Woven Fabric[J]. *China textile university journal*, 1999, 25(3):34-37(Ch).
- [4] 辛斌杰, 余序芬, 吴兆平. 机织物经纬密测量的图像处理技术[J]. *中国纺织大学学报*, 1999, 25(3): 34-37.
- [5] Feng Yili, Li Ruqin. Automatic Measurement of Weave Count with Wavelet Transfer [J]. *Journal of Textile Research*, 2001, 22(2):30-31(Ch).
- [6] 冯毅力, 李汝勤. 用小波变换法自动测量机织物经纬密度[J]. *纺织学报*, 2001, 22(2): 30-31.
- [7] Sun Xiaoming, Guan Weibo, Wang Jintang. Analyzing of Knitting Fabric's Density Based on DFT[J]. *Journal of Southern Yangtze University*, 2003, 2(5):72-75(Ch).
- [8] 孙晓明, 官伟波, 王晋棠. 基于傅立叶变换的针织物密度分析[J]. *江南大学学报*, 2003, 2(5): 72-75.
- [9] Zhao Yanxu, Long Hairu. Study on the Automatic Measurement of the Density of Knitted Fabrics by Image Processing[J]. *Journal of Donghua University, Natural Science*, 2004, 30(6):46-49(Ch).
- [10] 赵延旭, 龙海如. 利用图像处理技术自动测量针织物密度的研究[J]. *东华大学学报(自然科学版)*, 2004, 30(6): 46-49.
- [11] Lang Rui. Digital image processing learn Visual c++ realization[M]. Beijing: Beijing Hope Publication House, 2002(Ch).
- [12] 郎锐. 数字图像处理学 Visual C++实现[M].北京:北京希望电子出版社, 2002.
- [13] William K.Pratt. Digital image processing(Deng Luhua, Zhang

- Yanheng translation, Etc)[M]. Beijing: Mechanical industry press, 2005(Ch).
- William K.Pratt. 数字图像处理 (邓鲁化, 张延恒等译) [M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [9] Zhang Yujin. Digital image processing[M]. Beijing: Tsinghua university press, 1999(Ch).
章毓晋. 数字图像处理[M].北京: 清华大学出版社, 1999.
- [10] Fan Changxin. Communication principle[M]. Beijing: National Defence Industrial Press, 2001(Ch).
樊昌信. 通信原理[M].北京:国防工业出版社,2001.
- [11] Miu Shaogang. Digital image processing[M]. Chengdu: Southwest jiaotong university press, 2001(Ch).
缪绍纲. 数字图像处理 [M].成都:西南交通大学出版社,2001.
- [12] Ruan Qiuqi. Digital image processing learn[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2001(Ch).
阮秋琦. 数字图像处理学[M].北京:电子工业出版社,2001.
- [13] Wang Xincheng. Advanced image processing technology[M]. Beijing: China science &technology press, 2000(Ch).
王新成.高级图象处理技术.北京:中国科学技术出版社, 2000.