Solving Algorithm of Knapsack Problem based on HDEA

Yongfu Xiong [1], Chao Yu [2], Mengting Yuan[3]
[1,2]*CCNIIT, Chengdu 611844, China*
[3]*Wuhan university, Wuhan 430072, China*
E-mail: xyongfu@163.com

Abstract: Finding the optimized solution from Feasible solution is the goal for solving combination problems. In this paper, we obtain a new Hybrid Dynamic Evolutionary Algorithm(HDEA) to solve combination, which is derived from original Dynamic Evolutionary Algorithm integrated with local search strategy and simulated annealing strategy. An example on 0-1 knapsack problem is also given, in which we presents the description for problem solving algorithm based on HDEA. Corporations on the performance between HEDA and the greedy method are made, which shows that our HDEA has the better performance than greedy method on accuracy.

Keywords: HDEA; knapsack problem; greedy method

混合动力学演化算法在背包问题中的应用

熊永福 [1], 喻　超 [2],袁梦庭 [3]
[1,2.]成都东软信息技术学院,四川省 成都市 611844
[3.]武汉大学计算机学院, 湖北省 武汉市　430072
E-mail: xyongfu@163.com

摘　要：组合优化问题的目标是从组合问题的可行解中求出最优解，本文将局部搜索以及模拟退火的策略融入动力学演化算法而得到的一种新的求解组合优化问题的动力学演化算法（HDEA 算法）。并以 0-1 背包问题为例，给出了求解 0-1 背包问题的混合动力学演化算法的算法描述，并且将该算法的性能与贪婪法作了比较，实验的结果表明 HDEA 算法在求解精度上优于贪婪法，这表明了该算法具有较优的性能。

关键词：动力学演化算法；背包问题；贪婪算法

1 引言

在各个工程应用领域存在着大量组合优化问题，组合优化问题的目标是从组合问题的可行解中求出最优解。其中许多问题如旅行商问题等，至今没有找到有效的多项式时间算法。这些问题已被证明是 NP 完全问题[1]。本文基于统计物理中的自由能极小化原理，在局部搜索、模拟退火以及演化等方法的研究基础上，将局部搜索以及模拟退火的策略融入动力学演化算法[2]而得到的一种新的求解组合优化问题的动力学演化算法（Hybrid Dynamical Evolutionary Algorithm，简称 HDEA）。

自由能(free energy)的概念是 1879 年由热力学的奠基人 Joisah.Willard Gibbs 提出的，他提出的自由能公式表示如右：F=E-TS ，其中 E 是系统的内能(interned energy),T 是系统温度，S 是系统的熵，F 即为系统的自由能。

自由能极小化定律：“对于与周围环境交换热量而温度保持不变的封闭系统，系统状态的自发变化总是朝着自由能减少的方向进行，当自由能达到最小值时，系统达到平衡态。”

HDEA 的算法框架如下：

Procedure HDEA
Begin
设置种群数量 N，变异概率 Pm，接收率μ，冷却率λ，停机参数 k，凝固温度 Tmin;
确定初始温度 Tmax;
t←0，T←Tmax;
随机初始化 P(t)={xt(1),xt(2),......,xt(N)};
While NOT 停机条件 do
Begin

For i=1 to N do
Begin
if random[0,1)<Pm then 对xt(i)执行变异操作得到x'
else 从P(t)中随机选取一个个体协助xt(i)变异得到x';
if eval(x')优于eval(xt(i)) then xt'(i)←x'
Else if random [0,1)<e(eval(xt(i))-eval(x'))/T then xt'(i)←x'
else xt'(i)←xt(i);
End
令P(t)'={ xt'(1), xt'(2),……, xt'(N)};
从P(t)与P(t)'中选取适应值最优的N/m个个体加入P(t+1);
Repeat
For j=1 to N do
按照(3.2.1)式计算将xt(j)加入到P(t+1)后整个群体的自由能Fj;
对Fj从小到大排序，选择前N/m个Fj对应xt(j)的加入到P(t+1);
Until 循环m-1次
T←λT，t←t+1;
if T<Tmin and NOT 停机条件 then T←Tmax;
End
End.

本文将以0-1背包问题为例，来具体讨论HDEA算法的应用，并与其他近似算法作对比实验。

0-1 背包问题是经典的组合优化问题，问题具体描述如下：

从n种物品中选取总重量不超过b公斤重的物品，每种物品至多选一件。问该如何选取，才能使得所选物品的总价值最大。

设第i种物品的重量为wi，价值为ci，i=1,2,⋯,n。则0-1背包问题的数学描述如下：

解空间： $S=\{0,1\}^n$

变量： $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n) \in S$，$x_i=\begin{cases}0，若第\ i种物品未选上，\\ 1，否则。\end{cases}$

目标： $\max f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

约束： $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le b$

求解0-1背包问题的近似算法有许多，如贪婪法、桑尼算法以及伊巴拉-基姆算法等，本文具体介绍贪婪法，并将其与混合动力学算法作对比实验。

贪婪法的基本步骤如下：

step1：按单位体积的价值从大到小排列物品。不妨设c1/a1≥c2/a2≥…≥cn/an；

step2：顺序检查每一件物品，只要能装得下就将它装入背包，如果装不下则放弃。设装入背包的物品的总价值为V；

step3：令ck＝max{cj | j=1,2,…,n }　。若ck＞V则将背包内的物品换成k。

2 求解0-1背包问题的混合动力学演化算法

2.1 解空间

ZKP的解空间是一个有约束的优化问题有可行解的集合，即

S={(x1, x2,⋯, xn)| ，xi∈{0,1}}，其中xi=1表示物品i被选入背包。

2.2 目标函数与适应值函数

目标函数为一需求最大值的价值函数： f(x1, x2,⋯, xn)=c1x1+c2x2+...+cnxn

但必须满足约束： ，xi∈{0,1}，i=1,2,⋯,n。

适应值函数与目标函数相同，此时个体适应值越大越优。

2.3 变异算子的设计

在此问题中令变异率Pm为1，即对所有的个体都只进行自我变异（即不需要在其它个体的协助下变异）。

随机选取物品i，

1）若i不在背包中，则将其直接装入背包。若装入物品 i 后不满足约束条件则从背包中取出价值与重量之比最小另—物品j，如果仍然不满足约束条件则按照优先取出价值与重量之比最小的原则从背包中取出未被取出过物品，并且取出后一物品的同时放回前次取出的物品，直到满足约束条件为止。

2）若i在背包中，则将其取出，并同时随机装入另一物品j，如果此时不满足约束条件则依照1）中的办法执行。

根据变异产生新解的两种可能，伴随的背包价值差为

$$\Delta f=\begin{cases}c_i(将物品\ i直接装入\ )\\ c_i-c_j(将i装入且将\ j取出)\end{cases}$$

2.4 种群熵和自由能的定义

978-1-935068-18-1 © 2010 SciRes.

对于种群熵 H 的定义如下：

$$P_{ij}=\frac{n_{ij}}{N}(i=1, 2\dots n;\ j=0, 1) \qquad (1)$$

其中 Pij 表示当从种群中选择一个个体时，该个体表示的背包放入物品的方案中第 i 个物品放入（j=1）或者未放入（j=0）的概率，nij 表示种群中第 i 位上的值是 j 的个体数量，N 表示种群中个体总数。

$$H_i=-\sum_{j=0}^{1}P_{ij}\log_2 P_{ij} \qquad (2)$$

$$H=\sum_{i=1}^{n}H_i \qquad (3)$$

种群自由能定义如下：

F=E-TH （4）

因为是求最大值问题，所以 E 是种群中所有个体平均适应值的相反数。

求解 0-1 背包问题的 HDEA 算法框架可细化如下：

Procedure HDEA-ZKP
Begin
设置以下参数
种群数量 N；变异率 P_m；接收率 μ；冷却率 λ；停机参数 k；凝固温度 T_{min}；
确定初始温度 T_{max};
$t\leftarrow 0$，$T\leftarrow T_{max}$;
随机初始化 $P(t)=\{x_t(1),x_t(2),\dots\dots,x_t(N)\}$;
While NOT 停机条件 do
Begin
For i=1 to N do
Begin
*//*对 $x_t(i)$执行变异操作得到 x'*//*
评价 $x_t(i)$;
$x=(x_1, x_2\dots x_n)\leftarrow x_t(i)$;
$j\leftarrow random\ [0, 1)$;
If $x_j=0$ then 将 x 中 x_j 变为 1;
Else
Begin
随机选取 k 满足 $x_k=0$，将 x 中 x_k 变为 1;
将 x 中 x_j 变为 0;
End
If x 满足约束条件 then $x'\leftarrow x$
Else
Begin
对背包中的物品的价值与重量之比由小到大按序排列，按照优先取出价值与重量之比最小的原则从背包中取出未被取出过物品，并且取出后一物品的同时放回前次取出的物品，直到满足约束条件为止;
$x'\leftarrow$此时对应解;
End
评价 x';
if eval(x')优于 $eval(x_t(i))$ then $x_t(i+N)\leftarrow x'$
Else if random $[0,1)<e^{(eval(xt(i))-eval(x'))/T}$ then $x_t(i+N)\leftarrow x'$
else $x_t(i+N)\leftarrow x_t(i)$;
End
令 $P(t)'=\{x_t(1+N),x_t(2+N),\dots\dots,x_t(2N)\}$;
从 P(t)与 P(t)'中选取适应值最优的 N/k 个个体加入 P(t+1);
Repeat
For j=1 to N do
按照(5.2.4)式计算将 $x_t(j)$加入到 P(t+1)后整个群体的自由能 F_j;
对 F_j 从小到大排序，选择前 N/k 个 F_j 对应 $x_t(j)$的加入到 P(t+1);
Until 循环 k-1 次
$T\leftarrow\lambda T$，$t\leftarrow t+1$;
if $T<T_{min}$ and NOT 停机条件 then $T\leftarrow T_{max}$;
End
End.

3 数值实验

下面来 HDEA 算法看一看应用于 0-1 背包问题的实验结果。

选取以下随机生成的 7 个测试例子作为实验对象：

[例 1]有 5 个物品的 0-1 背包问题，最大重量 b=5，物品价值分别为 c={6，11，7，3，9}，物品重量分别为 w={1，1，3，2，2}。

[例 2]有 6 个物品的 0-1 背包问题，最大重量 b=10，物品价值分别为 c={61，59，31，21，15，5}，物品重量分别为 w={6，5，3，2，1，1}。

[例 3]有 7 个物品的 0-1 背包问题，最大重量 b=10，物品价值分别为 c={299，73，159，221，137，89，157}，物品重量分别为 w={4，1，2，3，2，1，2}。

[例 4]有 8 个物品的 0-1 背包问题，最大重量 b=110，物品价值分别为 c={10，20，30，32，40，50，55，60}，物品重量分别为 w={1，10，20，22，30，40，45，55}。

[例 5]有 10 个物品的 0-1 背包问题，最大重量 b=339，物品价值分别为 c={100，110，120，20，40，60，64，80，32，45}，物品重量分别为 w={120，135，165，3，30，60，66，90，4，5}。

[例 6]有 14 个物品的 0-1 背包问题，最大重量 b=360，物品价值分别为 c={100，110，120，20，10，

30，42，62，118，122，40，60，64，80}，物品重量分别为 w={120，135，165，3，3，3，6，9，15，18，30，60，66，90}。

[例 7]有 20 个物品的 0-1 背包问题，最大重量 b=530，物品价值分别为 c={160，128，120，80，244，236，124，84，60，20，40，240，220，200，15，63，177，45，93，183}，物品重量分别为 w={120，88，80，40，24，20，12，8，4，4，4，220，180，160，5，10，25，5，15，30}。

实验结果如表 1 所示。

表 1　HDEA 算法与贪婪法的实验结果比较

例	最优结果		贪婪法		HDEA 算法	
	总价值/总重量	最优解	总价值/总重量	贪婪法求得的近似解	总价值/总重量	HDEA 算法所求最优解
例 1	34/5	11100	34/5	11100	34/5	11100
例 2	111/10	011100	107/10	101010	111/10	011100
例 3	777/10	1110011	768/10	1011010	777/10	1110011
例 4	152/108	11110001	132/83	11111000	147/98	11110010
例 5	381/333	0011111011	341/258	0001111111	371/303	0101111011
例 6	526/354	00110011101110	478/279	00010101011111	516/324	01010011101110
例 7	1385/502	01110111001100011010	1277/402	11111010101000000111	1365/462	01110111001010011010

本次试验中种群数量 N 设定为 100，变异率 Pm 设定为 1，接收率 μ=0.8，凝固温度 Tmin=0.5，冷却率 λ=0.9，停机参数 k=10，每个实例均运行 15 次，取最优值。将 HDEA 算法的实验结果与贪婪法的实验结果进行了比较，比较结果如表 1 所示。表 1 的实验数据表明 HDEA 算法的实验结果明显优于贪婪法的实验结果，并且，HDEA 算法的运行时间也相当快。

4 总结

在各个工程应用领域存在着大量组合优化问题，组合优化问题的目标是从组合问题的可行解中求出最优解。本文基于统计物理中的自由能极小化原理，在局部搜索、模拟退火以及演化等方法的研究基础上，将局部搜索以及模拟退火的策略融入动力学演化算法而得到的一种新的求解组合优化问题的动力学演化算法（简称 HDEA）。本文以 0-1 背包问题为例，给出了求解 0-1 背包问题的混合动力学演化算法的算法描述，并且将 HDEA 算法的性能与贪婪法作了比较。实验的结果表明 HDEA 算法在求解精度上优于贪婪法，而且运行时间也相当快，这表明了 HDEA 算法具有较优的性能。

References (参考文献)

[1] Zezeng Zhang, NPC Theoretical guidance [M],Guiyang Renming Press, 1989.
张泽增. NPC 理论导引[M],贵阳：贵州人民出版社, 1989.

[2] Yuanxiang Li, Xiufen Zou,Kang Lishan, Zbigniew Michalewicz. A New Dynamical Evolutionary Algorithm Based on Statistical Mechanics[J]`, Journal of Computer Science and Technology. Vol18,No.3,pp 361-368, 2003.

[3] Richard A.Brualdi. Introductory Combinatorics[M],Fourth Edition. China Machine Press, 2004.

[4] Zengjun Pan、Lishan Kang、Yuping Chen, Evolutionary computation [M], Tsinghua University Press, 1998.
潘正君、康立山、陈毓屏, 演化计算[M], 清华大学出版社, 1998.

[5] Baeck, Handbook of Evolutionary Computation[M], Institute of Physics Publishing, 2003.

978-1-935068-18-1 © 2010 SciRes.