Study of Global Convergence Conditions on Standard Particle Swarm Optimization Algorithm

HAN Qingtao[1], REN Bin[1,2], ZHANG Lijuan[3]

1. Department of Electro, Dongguan University of Technology, Dongguan, China
2. College of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou, China
3. Computer Department of Dongguan University of Technology, Dongguan, China

Abstract: In this paper, According to standard PSO algorithm discrete-time linear theory analysis reaching the condition of ensuring the global situation convergence. In accordance with the conditions to ensure global convergence in the adjustment process of inertia weight ω, to adjust other parameters, and would not lead to system instability or lower convergence. According to the conditions at the appropriate selection algorithm control parameters, the standard PSO algorithm can well converge to the optimal solution, available to the global optimum.

Keywords: standard particle swarm optimization; convergence conditions; optimal; research

标准微粒群最佳算法的全局收敛性条件研究

韩清涛[1]，任 斌[1,2]，张丽娟[3]

1．东莞理工学院电子工程学院，东莞，中国，523808
2．广东工业大学自动化学院，广州，中国，510090
3．东莞理工学院计算机学院，东莞，中国，523808

摘　要: 微粒群优化算法是一种新兴的进化计算算法，由于算法的随机性，并不能证明该算法具有全局收敛性。本文对标准 PSO 算法进行了离散时间线性理论分析，得出了保证全局收敛的条件，根据这个保证全局收敛的条件，在调整惯性权重 ω 的过程中，可以相应调整其它参数，而不会导致系统的不稳定或收敛性降低。根据此条件在适当选择算法的控制参数的前提下，标准 PSO 算法能很好地收敛到最优解，可获得全局最优。

关键词: 标准微粒群算法；收敛性；最优；研究

1 引言

微粒群优化算法(Particle Swarm Optimizer, PSO)是一种新兴的进化计算技术，是由美国心理学家 James Kennedy 和电气工程师 Russell Eberhart 受鸟群觅食行为的启发于 1995 年提出的[1]。PSO 是基于群体智能理论的优化算法，通过群体中粒子间的协作与竞争产生的群体智能指导优化搜索。

由于 PSO 具有简单、易于实现、依赖的经验参数少和收敛速度快等特点,在很多领域得到了应用,目前已形成学术界一个新的研究热点，其研究大致可经分为：算法的改进、算法的分析及算法的应用。其中为了提高算法的收敛性能，Shi 和 Eberhart 于 1998 年对 PSO 算法的速度项引入了惯性权重 ω [2]，并提出在进化过程中动态调整惯性权重以平衡收敛的全局性和收敛速度，该进化方程已被相关学者称之为标准 PSO 算法，但在调整惯性权重 ω 的过程中，其它参数如果不做相应调整，会导致系统的不稳定或收敛性降低，而且由于算法的随机性，除对于特殊函数外，并不能证明该算法具有全局收敛性[35]。本文对标准 PSO 算法进行了离散时间线性理论分析，得出了保证全局收敛的条件，根据这个保证全局收敛的条件，在调整惯性权重 ω 的过程中，可以相应调整其它参数，而不会导致系统的不稳定或收敛性降低。根据此条件在适当选择算法的控制参数的前提下，标准 PSO 算法能很好地收敛到最优解，可获得全局最优。

2 标准粒子群算法

假设在一个 d 维目标搜索空间中，有 m 个粒子组成一个群落，其中 $x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})$ 表示第 i 个粒

子在 N 维空间里的当前位置，$p_i=(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{in})$ 表示第 i 个粒子曾经到过的最好位置，$p_g=(p_{g1},p_{g2},\cdots,p_{gn})$ 表示整个粒子群迄今为止搜索到的最优位置，$v_i=(v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{in})$ 表示第 i 个粒子飞行速度，在基本 PSO 模型中，粒子的移动是由以下公式进行操作的：

$$\begin{aligned} v_{id}(t+1)=v_{id}(t)+c_1 rand()(p_{id}(t)-x_{id}(t)) \\ +c_2 Rand()(p_{gd}(t)-x_{id}(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

$$x_{id}(t+1)=x_{id}(t)+v_{id}(t+1) \quad (2)$$

c_1 和 c_2 为加速常数，分别被称为认知参数和社会参数，通常情况下都取值为 2，$rand(),Rand()$ 为[0, 1]之间的随机数；$v_{id}\in[-v_{\max},v_{\max}]$，$v_{\max}$ 是常数，由用户设定，设定较大的 $v_{\max}$ 可以保证粒子种群的全局搜索能力，较小的 $v_{\max}$ 则加强粒子种群的局部搜索能力。

标准 PSO 模型与基本 PSO 模型的不同之处在于，通过一个惯性权值 ω 来协调粒子群的全局和局部寻优能力。标准 PSO 可以写成:

$$\begin{aligned} v_{id}(t+1)=\omega v_{id}(t)+c_1 rand()(p_{id}(t)-x_{id}(t)) \\ +c_2 Rand()(p_{gd}(t)-x_{id}(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_{id}(t+1)=x_{id}(t)+v_{id}(t+1) \quad (4)$$

惯性权 ω 的作用是用来协调粒子群的全局和局部寻优能力，一个大的惯性权值 ω 有利于展开全局寻优，而一个小的惯性权值则有利于局部寻优。因此，如果在迭代计算过程中线性递减惯性权值，则粒子群算法在开始时具有良好的全局搜索性能，能够迅速定位到接近全局最优点的区域，而在后期具有良好的局部搜索性能，能够精确的得到全局最优解。

在群体寻求一致的认知过程中，个体往往记住自身的信息，同时考虑其他个体的信息。当某个个体察觉到其他个体的信息较好的时候，它将进行适应性调整。从生物类比的角度来说，式中的第一项 $\omega v_{id}(t)$ 为认知项，表示粒子对当前自身运动状态的信任，依据自身的速度进行惯性运动，第二项 $c_1 rand()(p_{id}(t)-x_{id}(t))$ 为“认知”项，表示粒子自身的思考，该项与粒子的认知经验相关；第三项 $c_2 Rand()(p_{gd}(t)-x_{id}(t))$ 为“社会”项，表示粒子间的信息共享与相互合作，式表示粒子在求解空间中，由于相互影响导致的运动位置调整。

对于标准 PSO 算法的进化方程(3)、(4)，不失一般性，假设为一维优化问题，这样就可在式（3）与（4）中去掉下标 d。

$$v_i(t+1)=\omega v_i(t)+c_1 r_1(p_i(t)-x_i(t))+c_2 r_2(p_g(t)-x_i(t)) \quad (5)$$

$$x_i(t+1)=x_i(t)+v_i(t+1) \quad (6)$$

粒子群空间寻优过程见图 1。

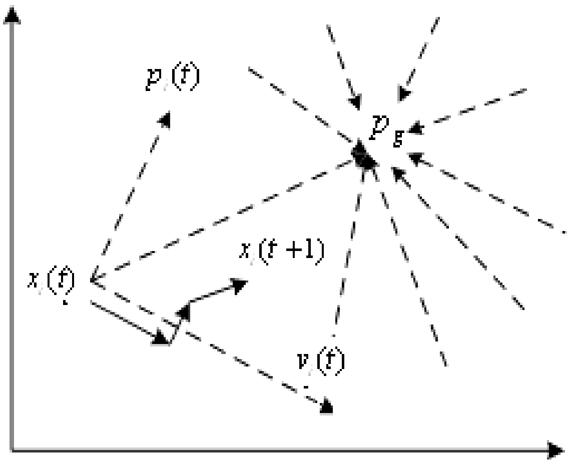

Figure 1. Optimization Process in PSO Space
图 1. 粒子群空间寻优过程

通常情况下，粒子群体的规模取 20~40 个，并随问题规模的增大而增加。在每次迭代过程中，为平衡全局搜索能力和局部搜索能力的作用，每个粒子的速度都会被限制在一个最大速度（$V_{\max}$）内，$V_{\max}$ 一般设为变量变化范围的 10%~20%。

3 标准 PSO 算法收敛条件分析

由式（5）与（6）可得：

$$\begin{bmatrix} x_i(t+1) \\ x_i(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+\omega-\varphi & -\omega \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_i(t-1) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \varphi \\ 0 \end{bmatrix}p(t) \quad (7)$$

$$\varphi_1=c_1 r_1 \quad (8)$$

$$\varphi_2=c_2\cdot r_2 \quad (9)$$

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2 \quad (10)$$

$$p(t)=\frac{\varphi_1\cdot p_i(t)+\varphi_2\cdot p_g(t)}{\varphi_1+\varphi_2} \quad (11)$$

式(7)可写为: $X(t)=X^{'}(t)+X^{"}(t)$ (12)

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_i(t+1) \\ x_i(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

978-1-935068-04-4 © 2009 SciRes.

$$M=\begin{bmatrix}1+\omega-\varphi & -\omega \\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{14}$$

$$X^{'}(t)=MX(t-1)=M^{t}X(0) \tag{15}$$

$$X^{"}(t)=\sum_{\tau=0}^{t-1}H(t-\tau)U(\tau) \tag{16}$$

$$M^{t}=\begin{bmatrix}1+\omega-\varphi & -\omega \\ 1 & 0\end{bmatrix}^{t} \tag{17}$$

$$H(t-\tau)=\begin{bmatrix}1+\omega-\varphi & -\omega \\ 1 & 0\end{bmatrix}^{t-\tau-1}=M^{t-\tau-1} \tag{18}$$

$$U(\tau)=\begin{bmatrix}\varphi \\ 0\end{bmatrix}p(\tau) \tag{19}$$

由于 M=$H(2)=\begin{bmatrix}1+\omega-\varphi & -\omega \\ 1 & 0\end{bmatrix}$，其特征值为：

$$\lambda_{1,2}=\frac{(1+\omega-\varphi)\pm\sqrt{(1+\omega-\varphi)^2-4\omega}}{2} \tag{20}$$

由幂矩阵系列和矩阵幂级数收敛的条件可知，若满足条件$\max(\|\lambda_1\|,\|\lambda_2\|)<1$，其中$\|\lambda_1\|$，$\|\lambda_1\|$为特征值$\lambda_1$、$\lambda_2$的模，$X^{'}(t)$、$X^{"}(t)$分别收敛于某个值，此时$X(t)$收敛，即粒子群算法收敛。

式（20）中λ_1、λ_2的取值由w、φ决定。对式（20）做如下讨论：

(1) 当特征值为两个实根时，要使幅值小于 1，必满足条件：

$$\begin{cases}(1+\omega-\varphi)^2-4\omega\ge 0 \\ \max(\|\lambda_1\|,\|\lambda_2\|)=\left|\frac{(1+\omega-\varphi)\pm\sqrt{(1+\omega-\varphi)^2-4\omega}}{2}\right|<1\end{cases} \tag{21}$$

因为w,φ均大于 0，式（21）可化简计算得：

$$\begin{cases}0<\omega<1 \\ 0<\varphi\le 1+\omega-2\sqrt{\omega}\end{cases} \tag{22}$$

或

$$\begin{cases}0<\omega\le 1 \\ 1+\omega+2\sqrt{\omega}\le\varphi\le 2\omega+2\end{cases} \tag{23}$$

（2）当特征值为两个复根时，为系统稳定，必满足条件：

幅值

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{(1+\omega-\varphi)^2-(1+\omega-\varphi)^2+4\omega}/2\\&=\sqrt{4\omega}/2=\sqrt{\omega}<1\end{aligned} \tag{24}$$

和$(1+\omega-\varphi)^2-4\omega<0$ (25)

即：
$$\begin{cases}\omega<1 \\ (1+\omega-\varphi)^2-4\omega<0\end{cases} \tag{26}$$

由w,φ均大于 0，式（26）可化简计算得：

$$\begin{cases}0<\omega<1 \\ 1+\omega-2\sqrt{\omega}<\varphi<1+\omega+2\sqrt{\omega}\end{cases} \tag{27}$$

综合式(22)，(23)，(27)，可得基本 PSO 算法收敛条件是：

$$\begin{cases}0<\omega<1 \\ 0<\varphi<2\omega+2\end{cases} \tag{28}$$

ω、φ取值满足式(28)时，标准 PSO 算法收敛，可以获得全局最优。

例如，取控制参数ω=0.729 8，可取$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$<2+2$\omega$=3.4596，由于$r_1$、$r_2$为(0,1)间的随机数，因此可取$\varphi_1\in$(0,1.7298)，$\varphi_2\in$(0,1.7298)，($\varphi_1+\varphi_2$)$\in$(0，3.4596)。

当（$\varphi_1+\varphi_2$）$\in$（0，0.02123）或($\varphi_1+\varphi_2$)$\in$(3.43837，3.4596)时，有

$$(1+w-\varphi)^2-4w\ge 0 \tag{29}$$

$$\max(\|\lambda_1\|,\|\lambda_2\|)=\|\lambda_1\|<1 \tag{30}$$

当($\varphi_1+\varphi_2$)$\in$(0.0212 3，3.43836)时，有

$$(1+w-\varphi)^2-4w<0 \tag{31}$$

$$\|\lambda_1\|=\|\lambda_2\|<1 \tag{32}$$

因此，在不同的情况下，$\|\lambda_1\|$，$\|\lambda_1\|$均小于 1，系统稳定。

3 结束语

本文对标准PSO算法进行了离散时间线性理论分析，得出了保证全局收敛的条件，根据这个保证全局收敛的条件，在调整惯性权重ω的过程中，可以相应调整其它参数，而不会导致系统的不稳定或收敛性降

低。根据此条件在适当选择算法的控制参数的前提下，标准 PSO 算法能很好地收敛到最优解，可获得全局最优。

References (参考文献)

[1] Kennedy J, Eberhart RC. Particle swarm optimization. In: Proc. of the IEEE Conf. on Neural Networks, IV. Perth: IEEE Press, 1995. 1942−1948.

[2] Shi Y,Eberhart R C. A modified particle swarm optimizer[A]. In:proceedings of the IEEE international conference on evolutionary computation. Piscataway,NJ:IEEE press,1998,69−73.

[3] F. Solis, R. Wets. Minimization by random search techniques[J]. Mathematics of Operations Research, 2000, 6(1): 19~30.

[4] F. Van den Bergh. An analysis of particle swarm optimizers:PhD dissertation]. Pretoria: University of Pretoria, 2001.

[5] Clerc M., Kennedy J. The particle swarm explosion,stability and convergence in a multidimendional complex space[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(1):58−73.

978-1-935068-04-4