

Self-Calibration of Mutual Coupling in Uniform and Circular Arrays

ZENG Zhi-feng, MA Hua-shan

Southwest Electronics and Telecommunication Technology Research Institute, Chengdu, China

sky.zf.zeng@gmail.com

Abstract: It proposes a novel self-calibration method to compensate for mutual coupling in uniform and circular arrays. It is conceived to simultaneously compensate for mutual coupling and estimate the directions-of-arrival (DOA) without the presence of calibration sources. The superiority of this algorithm is showed in theory and conditions are provided for the existence of a solution. Computer simulations show higher calibration accuracy and modest computational complexity of the proposed method despite the presence of mutual coupling.

Keywords: DOA; uniform and circular Arrays; MUSIC; mutual coupling

均匀圆阵中互耦误差的无源校正算法

曾志峰, 马华山

西南电子通信技术研究所, 成都, 中国, 610041

sky.zf.zeng@gmail.com

【摘要】针对平面均匀圆阵系统中互耦误差的特有性质, 本文提出了一种新的无源校正算法。该算法通过迭代计算, 同步校正互耦误差和估计来波方向, 无需任何已知辅助信号源。同时理论分析了该算法解存在的条件及其优越性。计算机仿真结果显示, 该算法计算结果准确, 计算量小, 速度快。

【关键词】DOA; 均匀圆阵; MUSIC; 互耦

1 引言

基于特征值分解理论的DOA估计技术由于具有良好的分辨效率, 成为空间谱估计领域运用的重要依据, 但是在适宜应用中当阵列受到互耦效应等误差的影响时, 其算法的有效性及其分辨率将大幅度下降, 甚至直接导致失效。这也是空间谱估计测向技术自Schmidt于1986年重新提出^[1]却迟迟未能被广泛应用的重要原因。因此, 研究如何校正阵元间互耦引起了国内外学术界的广泛关注和研究。

到目前为止, 提出了一些阵列互耦误差校正算法, 主要分为两类, 一种是有源校正算法, 一种是自校正算法。前者通过一些精确已知或者大致已知位置信息的信号源的帮助, 来估计互耦误差^[2-5]。该算法精度相对较高, 但实际应用时辅助信号源很难精确已知, 实际信号有时也不能提供, 系统较复杂。后者则不需要辅助信号源, 充分利用已知信号信息进行校正^[6-7]。这种算法充分利用了信号的信息, 但是却增加了计算的复杂性和结果的模糊性, 需要进一步的研究。文[6]充分利用均匀阵的Toeplitz性质, 通过迭代同时估计幅

相误差, 互耦误差以及来波方向, 但是只适用于非线性阵, 计算量大、收敛速度慢, 最终结果很容易落入局部最小点。文[7]提出的算法适用于其它高精度测向估计算法, 但是同样有计算量大, 实现困难, 收敛速度慢等缺点。本文提出的算法属于后者, 其针对均匀圆阵中的互耦矩阵特有的性质, 提出了一种新的自校正算法, 该算法无需任何辅助信号源, 同时具有运算量小, 收敛快, 不会落入局部最优点等特点, 达到理想的定位性能。

本文组织如下: 第二部分, 建立了平面均匀圆阵二维MUSIC的测向算法模型, 并分析了互耦误差影响; 第三部分, 详细阐述了本文的自校正算法, 并论述相关结论以及解存在的条件; 第四部分, 通过计算机数值计算仿真, 论证该算法的正确性和有效性。最后得出相关结论。

2 阵列侧向及互耦模型

用 M 元天线阵对空间 D 个非相干入射信号进行测向, (α, β) 为辐射源信号的方位角和仰角, d 为

均匀圆阵直径。设各天线阵元的空间坐标为 (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, M$ 。设 D 个入射信号 $S_j(t)$ 的入射角度为 (α_j, β_j) , $j = 1, 2, \dots, D$, α_j, β_j 分别为入射信号的方位角和俯仰角。假设各阵元输出的噪声为白噪声 $n_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, M$, 噪声与信号互不相关。考虑互耦误差影响, 互耦矩阵为 C 。天线阵的阵列输出表示为:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

式中:

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T,$$

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_D(t)]^T,$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\alpha_1, \beta_1), \dots, \mathbf{a}(\alpha_D, \beta_D)]$$

$$\mathbf{a}(\alpha_k, \beta_k) = \begin{bmatrix} \exp(j2\pi / \lambda(x_k \sin \beta_k \cos \alpha_k + y_k \sin \beta_k \sin \alpha_k + z_k \cos \beta_k)) \\ \exp(j2\pi / \lambda(x_k \sin \beta_k \cos \alpha_k + y_k \sin \beta_k \sin \alpha_k + z_k \cos \beta_k)) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi / \lambda(x_k \sin \beta_k \cos \alpha_k + y_k \sin \beta_k \sin \alpha_k + z_k \cos \beta_k)) \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

$\mathbf{X}(t)$ 的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^H] = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}(\mathbf{C}\mathbf{A})^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (3)$$

因此, MUSIC 算法即为对下式空间谱函数进行峰值搜索, 其对应的 (α, β) 即为波达方向的估计值, 从而实现对空间辐射源的高精度定位。

$$P_{eg} = \frac{1}{\|\mathbf{E}_N^H \mathbf{C}\mathbf{a}(\alpha, \beta)\|_2^2} \quad (4)$$

根据电磁场和电路原理可知, 互耦矩阵可表示为

[8]

$$\mathbf{C} = (\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_L)(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_L \mathbf{I}_N)^{-1} \quad (5)$$

其中 \mathbf{Z}_A 为阵元阻抗, \mathbf{Z}_L 为输入阻抗, \mathbf{Z} 为互耦阻抗矩阵, \mathbf{I}_N 为 N 阶单位阵。

3 新自校正算法

3.1 相关推论

推论 1: 基于平面均匀圆阵的互耦矩阵

$$C_{ij} = \begin{cases} c_{|i-j|} & |i-j| \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor \\ c_{M-|i-j|} & |i-j| > \lfloor \frac{M}{2} \rfloor \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 为取不大于该值的最大整数,

$c_0, c_1, \dots, c_{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor}$ 为矩阵 \mathbf{C} 的元素, $i, j = 1, 2, \dots, M$ 。

从该矩阵可以看出, 平面均匀圆阵的互耦矩阵是循环复对称 Toeplitz 矩阵^[9]。

推论 2: 对于任意 $M * 1$ 维复向量 \mathbf{X} 和 $M * M$ 维的带状复对称 Toeplitz 矩阵 \mathbf{C} , 有下式成立:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Q}_3(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{c} \quad (7)$$

其中 \mathbf{c} 为 $M * 1$ 维向量, $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{M-1}]^H$,

$\mathbf{Q}_3(\mathbf{X}) = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ 为 $M * M$ 维矩阵,

$$[\mathbf{W}_1]_{pq} = \begin{cases} \mathbf{X}_{p+q-1}, & p+q \leq M+1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

$$[\mathbf{W}_2]_{pq} = \begin{cases} \mathbf{X}_{p-q+1}, & p \geq q \geq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $p, q = 1, 2, \dots, M$, 该结论在文[6]中有详细证明。

推论 3: 对于任意 $M * 1$ 维复向量 \mathbf{X} 和满足式(7)的 $M * M$ 维的复对称 Toeplitz 矩阵 \mathbf{C} , 有下式成立:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Q}_4(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{c} \quad (9)$$

其中 \mathbf{c} 为 $(L+1) * 1$ 维向量, $L = \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$,

$\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_L]^H$, $\mathbf{Q}_4(\mathbf{X})$ 为 $M * (L+1)$ 维矩阵, $p = 1, 2, \dots, M, q = 1, \dots, L+1$, 可表示为:

$$[\mathbf{Q}_4(\mathbf{X})]_{pq} = \begin{cases} [\mathbf{Q}_3(\mathbf{X})]_{pq} & q=1 \\ [\mathbf{Q}_3(\mathbf{X})]_{pq} + [\mathbf{Q}_3(\mathbf{X})]_{p(M+2-q)} & 1 < q < L+1 \\ [\mathbf{Q}_3(\mathbf{X})]_{pq} & q=L+1, \text{且} M \text{是偶} \\ [\mathbf{Q}_3(\mathbf{X})]_{pq} + [\mathbf{Q}_3(\mathbf{X})]_{p(q+1)} & q=L+1, \text{且} M \text{是奇} \end{cases} \quad (10)$$

由于篇幅问题, 证明从略。

3.2 校正算法

由第二部分介绍的测向模型可知, 校正算法的关键在于估计互耦矩阵 \mathbf{C} 。故构造代价函数(2), 使其取最小值时对应的 $\hat{\mathbf{C}}$ 即为互耦矩阵的估计值, 令 $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}}$ 时通过 MUSIC 算法计算的 $\{\theta_n\}$ 即为来波方向 $\{\theta_n\}$ 的估计值。

$$J_C = \sum_{n=1}^D \|\hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{C}\mathbf{a}(\theta_n)\|^2 \quad (11)$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 Euclidean 范数, $\hat{\mathbf{U}}$ 为噪声矩阵 \mathbf{U} 的估计值, 对于真实的 \mathbf{U}, \mathbf{C} 和 $\{\theta_n\}$, J_C 将达到最小值。而要求解式(11), 利用推论3的结果做如下转化:

$$J_C = \sum_{n=1}^D \|\hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{C}\mathbf{a}(\theta_n)\|^2 = \mathbf{c}^H \left[\sum_{n=1}^D \mathbf{Q}_4(\mathbf{a}(\theta_n)) \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{Q}_4(\mathbf{a}(\theta_n)) \right] \mathbf{c} \quad (12) = \mathbf{c}^H \mathbf{Q}_c \mathbf{c}$$

其中 $\mathbf{Q} = [\sum_{n=1}^D \mathbf{Q}_4(\mathbf{a}(\theta_n)) \mathbf{U}^H \mathbf{U} \mathbf{Q}_4(\mathbf{a}(\theta_n))]$, 另外

令 $\boldsymbol{\omega} = [1, 0, \dots, 0]^H$, 有约束条件 $\mathbf{c}^H \boldsymbol{\omega} = 1$, 组成了一个线性约束条件下的二次最小值求解问题, 最后求解结果为:

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}^H (\mathbf{Q}^{-1}) \boldsymbol{\omega}} \quad (13)$$

由2.1推论可知互耦矩阵 \mathbf{C} 可由 $\hat{\mathbf{c}}$ 构成, 可见互耦矩阵 \mathbf{C} 是来波方向 $\{\theta_n\}$ 的函数。由于目标信号源的来波方向很容易大致知道其分布范围 $[\theta_l^0, \theta_u^0]$, 故根据黄金分割寻优准则^[11], 本文的自校正算法分为以下三个步骤:

a) 初始化寻优迭代次数计数 $k = 0$, 初始化来波方向为 $[\theta_l^0, \theta_u^0]$, 根据黄金分割优化算法, 可选择新的区间为

$$\begin{aligned} \varphi_l^0 &= \theta_l^0 + 0.382 * (\theta_u^0 - \theta_l^0) \\ \varphi_u^0 &= \theta_u^0 + 0.618 * (\theta_u^0 - \theta_l^0) \end{aligned} \quad (14)$$

b) 分别根据式(13)计算来波方向为 φ_l^k, φ_u^k 时对应的互耦矩阵, 进而求出来波方向为 φ_l^k, φ_u^k 时对应的目标函数 $J_c(\varphi_l^k), J_c(\varphi_u^k)$, 做如下更新:

$$\text{if } J_c(\varphi_l^k) \geq J_c(\varphi_u^k) \quad \theta_l^{k+1} = \varphi_l^k, \theta_u^{k+1} = \theta_u^k \quad (15)$$

$$\text{if } J_c(\varphi_l^k) < J_c(\varphi_u^k) \quad \theta_l^{k+1} = \theta_l^k, \theta_u^{k+1} = \varphi_u^k$$

$$\begin{aligned} \varphi_l^{k+1} &= \theta_l^{k+1} + 0.382 * (\theta_u^{k+1} - \theta_l^{k+1}) \\ \varphi_u^{k+1} &= \theta_u^{k+1} + 0.618 * (\theta_u^{k+1} - \theta_l^{k+1}) \end{aligned} \quad (16)$$

c) $k = k + 1$, 判断结束, 可以有两种: 一种是迭代次数 $k > k_0$ 时结束, k_0 为最大迭代次数, 另一种是

新的来波方向区间满足 $\theta_u^{k+1} - \theta_l^{k+1} < \varepsilon$ 时结束, ε 为预设门限。若不满足结束条件, 则跳转进入b过程。若满足结束条件, 来波方向取值为:

$$\hat{\theta} = (\theta_u^{k+1} + \theta_l^{k+1}) / 2 \quad (17)$$

也可以通过 $\hat{\theta}' = (\theta_u^{k+1} + \theta_l^{k+1}) / 2$ 根据式(13)求解相应互耦矩阵, 最后根据式(4)求得来波方向估计值 $\hat{\theta}$ 。

3.3 本算法解存在条件及优越性

通过分析本算法的过程, 我们可以知道本算法求解过程关键在于建立互耦矩阵 \mathbf{C} 与来波方向 $\{\theta_n\}$ 的函数。而由式(13)可以知道, $\hat{\mathbf{c}}$ 求解存在的必要条件是 \mathbf{Q} 的逆矩阵存在, 即有:

$$\text{Rank}(\mathbf{U}^H \mathbf{U}) \leq M - D \geq \text{Rank}(\mathbf{Q}) = \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1 \quad (18)$$

故 $D \leq M - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor - 1$ 是本算法解存在的条件。

与文[6]提出的F-W算法相比, 本文提出的算法具有以下明显的优越性:

1) 只要来波方向初始化区间范围适当, 该算法必定收敛, 而F-W算法则会收敛于局部解。来波方向的估计区间可以通过其他手段获得, 也可以通过未校正MUSIC算法结果确定。

2) 本文算法收敛过程更短, 求解速度更快, 计算结果更准确, 而F-W算法由于需要不断的循环迭代运算, 收敛速度较慢, 受各种误差因素影响结果不够准确。

4 计算机模拟仿真

不失一般性, 我们选择6元均匀圆阵, 阵元半径为0.75m, 另外为方便计算和比较, 假设入射信号波长为1m, 不考虑圆阵出现相位模糊问题, 俯仰角 $\beta = 0$, 信噪比均为20dB, 待测信号源分别为30°, 65°两个方向, 分别采用未校正方法, 精确已知辅助源算法(校正源在45°), F-W方法^[6]和本文提出的新方法分别计算, 比较其校正结果及性能。假设该圆阵互耦矩阵第一行向量为 \mathbf{z} :

$$\mathbf{z} = [1, 0.442+0.177j, 0.233+0.116j, 0.124+0.083j, 0.233+0.116j, 0.442+0.177j]$$

对于待测信号源来波方向分别为30°, 65°的来波方向其计算结果见表1(计算结果具有随机性, 本文结果均为采用30次蒙特卡罗实验取平均得到):

| 待测源来波方向 | 未校正 | 精确已知辅助信号源算法 | F-W方法 | 本文提出的方法 |
|---------|--------|-------------|--------|---------|
| 30° | 25.93° | 29.77° | 29.46° | 29.57° |
| 65° | 61.71° | 64.59° | 63.85° | 64.21° |

当入射角取65°, 各种算法计算得出的频谱图如图1所示的结果):

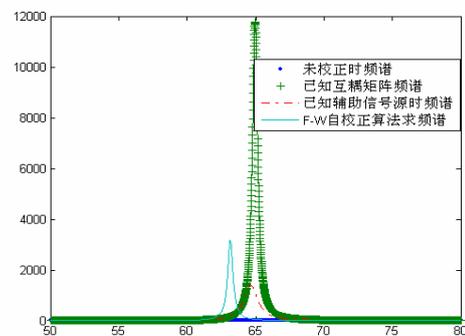


图1 (a)

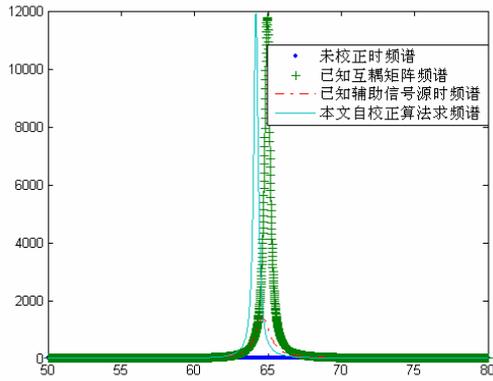


图1 (b)

从表1可以看出, 如果阵列受到互耦矩阵的影响, 如果不经过校正, 其高精度测向算法所得结果明显误差太大, 只有经过校正才能得到理想的效果。精确已知辅助信号源算法是通过辅助信号源的位置信息估计互耦矩阵, 从而获得待测信号来波方向的。从数据可以看出, 有源校正方法比本文提到的两种无源算法精度高很多。相比F-W算法, 本文提出的算法计算结果精度相对高一些。从图1可以看到, 本文算法比F-W算法计算结果所得的频谱图更尖锐, 峰值更接近真实值。图中未经过校正的频谱图峰值偏差较远, 并且频谱图不够尖锐, 分辨率较差。而精确已知辅助信号源算法的精度明显较高。

在做以上实验过程中, 我们发现, 本文提出的方法与F-W算法相比, 明显计算时间较短, 同时当来波方向为 65° 时, F-W算法运算结果的有效性跟迭代设置的初始化条件很有关系, 经常收敛不到有效解。而本文提出的算法不会出现无效解等情况。

References (参考文献)

- [1] R. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34 (3): 276–280.
- [2] M. Lin, Z. Q. Gong. Subspace-based calibration approach for mutual coupling among sensors [J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29: 1176–1179.
- [3] C. M. S. See. Method for array calibration in high resolution sensor array processing [J]. Proc. Inst. Elect. Eng. Radar. Sonar. Navigation, 1995, 29: 90–96.
- [4] C. M. S. See. Sensor array calibration in the presence of mutual coupling and unknown sensor gains and phases [J]. Elect. Lett., 1994, 20: 373–374.
- [5] E Guang-xi, Jiang Gu-feng. The blind estimating channel error of array antenna based on MUSIC [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2006, 28(4): 667–670.
俄广西, 蒋谷峰. 基于 MUSIC 的阵列天线通道误差的盲估计算法[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(4): 667–670.
- [6] B. Friedlander, A. J. Weiss. Direction finding in the presence of mutual coupling [J]. IEEE transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(3): 273–284.
- [7] F. Sellone, A. Serra. A novel on-line mutual coupling compensation algorithm for uniform and linear arrays [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(2): 560–573.
- [8] T. Svantesson. Modeling and estimation of mutual coupling in a uniform linear array of dipoles[C]. Proc. IEEE ICASSP, Phoenix, 1999, 2961–2964.
- [9] Wang Hong-xing. The Research of Antenna Array Self-Calibration Algorithm [D]. Master Paper. National University of Defense Technology, 2006: 16–17.
王鸿兴. 天线阵列自校正算法研究[D]. 硕士论文. 国防科学技术大学, 2006: 16–17.
- [10] Lin Min, Gong Zheng-quan. Calibration for mutual coupling among sensors in super-resolution direction-finding[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2002, 24(5): 631–636.
林敏, 龚铮权. 超分辨测向中阵元间互耦的校正[J]. 电子与信息学报, 2002, 24(5): 631–636.
- [11] Min Lin, Luxi Yang. Effect and Calibration of Mutual coupling in Circular Smart Antenna Applications[C]. APMC2005 Proceedings, 2005: 4–7.