

A Novel Concatenation Decoding Algorithm for Short LDPC Codes with Lower Complexities

BIAN Yinbing, FENG Guangzeng

College of Telecommunication and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Communication, Nanjing, China, 210003

e-mail: bybnjupt@yeah.net, gzfeng@njupt.edu.cn

Abstract: To improve the error-correcting performance of Short Low-Density-Parity-Code (LDPC), box and match decoding algorithm (BMA) and belief propagation serially concatenated with ordered statistics decoding algorithm (BP-OSD) are investigated, based on which, BP serially concatenated with BMA (BP-BMA) algorithm for the decoding of short LDPC codes is proposed. BP-BMA algorithm can make full use of the fact that the decoding complexity of BMA is lower than that of OSD. And then, combined with log-likelihood ratio (LLR) accumulation algorithm, computer simulations are done. Simulation results show that, compared with BP-OSD algorithm, the proposed concatenation algorithm brings more decoding gains with lower decoding complexities and gains a better tradeoff between decoding performance and complexities.

Keywords: short LDPC; belief propagation; ordered statistic decoding; box and match algorithm; concatenation algorithm

一种低复杂度的短 LDPC 码级联译码算法

卞银兵, 鄢广增

南京邮电大学通信与信息工程学院, 南京, 中国, 210003

e-mail: bybnjupt@yeah.net, gzfeng@njupt.edu.cn

【摘要】为了提高短低密度校验码 (Short LDPC) 的纠错性能, 在研究盒匹配译码算法 (BMA) 和置信度与分阶统计译码级联算法 (BP-OSD) 的基础上, 提出了一种新的针对短 LDPC 码译码的 BP-BMA 级联算法。该算法充分利用了 BMA 算法具有较低译码复杂度的特性。然后, 利用该算法结合对数似然比累积 (ALLR) 算法进行了计算机仿真。仿真的结果表明: BP-BMA 级联算法与 BP-OSD 相比, 译码性能有所提高, 且译码复杂度大大降低了, 在译码性能和复杂度间取得了很好的折中。

【关键词】短 LDPC 码; 置信度传播; 分阶统计译码算法; 盒匹配译码算法; 级联算法

1 引言

低密度奇偶校验码 (LDPC)^[1]是目前发现的所有编解码方案中最为逼近 Shannon 限的好码, 且已应用于通信系统、数字信号处理以及人工智能等^{[2][3]}领域, 因此成为纠错码领域最有前景且研究最多的编码方案之一。采用置信度传播 (BP)^[4]迭代译码算法的 LDPC 码的设计、构造、性能分析及应用等成了学术界研究的焦点。

众所周知, 中长码长的 LDPC 码的 BP 迭代译码算法能表现出优异的译码性能, 但是由于短码长的 LDPC 码的二分图 (Tanner Graph) 中的短环较多 (特别是 4 环), BP 迭代译码算法的性能相对而言有所损失。因此研究短码长 LDPC 码的译码算法成为当前国内外的热点。而分阶统计译码算法 (OSD)^[5]由于高

斯消去和排序的计算复杂度较高, 所以单独运用于 LDPC 译码不可行。Fossorier^[6]在深入研究 BP 和 OSD 结合动态性能的基础上, 提出一种针对短码长 LDPC 码的 BP-OSD 级联译码算法, 其利用了 BP 迭代后的软输出对数似然比 (LLR) 作为 OSD 的软输入的思想。该级联算法在译码复杂度和性能间取得了较好的折中, 并且接近于最大似然 (ML) 译码的性能。姜明^[7]在文献[6]的基础上, 把累积对数似然比 (LLR Accumulation) 的算法思想引入到 BP-OSD 级联算法中, 以译码复杂度稍增为代价换取了 BP-OSD 级联算法译码性能的进一步提高。正是受到文献[6][7]的启发, 将 BMA (box and match)^[8]算法引入到 BP-OSD 级联算法中, 取代 OSD 译码算法, 形成了一种新的 BP-BMA 级联算法。BMA 译码算法^[8]相对于 OSD 译码算法而言, 译码复杂度大大降低了, 只是内存需求

提高了。因此，BP-BMA 级联算法的译码复杂度相对于 BP-OSD 级联算法大大降低了。本文首先介绍 BP 迭代译码算法和 BMA 译码算法，在此基础上给出针对短码长 LDPC 以 Fossiorer 方式级联的 BP-BMA 算法，然后在 BP-BMA 级联算法中引入姜明^[7]提出的对数似然比累积算法进行计算机仿真。仿真的结果表明，提出的 BP-BMA 级联算法相对于 BP-OSD 级联译码算法取得了译码性能提高和复杂度降低的优势。

2 BP-BMA 级联译码算法

2.1 短 LDPC 的对数域 BP 译码算法

设定一个由 $m \times n$ ($m=n-k$) 奇偶校验矩阵定义的短 LDPC 码，经 BPSK 调制 ($x_i = 1 - 2c_i$) 后每一个码字 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ 映射为传输序列 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，然后通过 AWGN 信道，接收到的序列为 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ，其中， $y_n = x_n + z_n$ ，这里的 z_n 是一个均值为 0，方差为 σ^2 的高斯变量。根据 y ，译码得到译码序列为 $\hat{c}$ 。需要定义的对数似然比 (LLR) 消息如下：

信道初始消息

$$L_{n'}^0 = L(P_i) = \ln \frac{P_i(0)}{P_i(1)} = \ln \frac{\Pr\{x_i = 1 | y_i\}}{\Pr\{x_i = -1 | y_i\}} = 2y_i / \sigma^2 \quad (1)$$

校验节点传向变量节点的消息

$$L(r_{ji}) = \ln \frac{r_{ji}(0)}{r_{ji}(1)} \quad (2)$$

变量节点传向校验节点的消息

$$L(q_{ij}) = \ln \frac{q_{ij}(0)}{q_{ij}(1)} \quad (3)$$

变量节点收集到的所有消息

$$L(q_i) = \ln \frac{q_i(0)}{q_i(1)} \quad (4)$$

在定义完对数似然比消息后，下面给出对数域 BP 算法的迭代步骤：

(1) 初始化

计算信道传递给变量节点的初始概率似然比消息 $L(P_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。然后对每一个变量节点 i 和与其相邻的校验节点 $j \in C(i)$ ，设定变量节点传向校验节点的初始信息

$$L^{(0)}(q_{ij}) = L(P_i) = 2y_i / \sigma^2 \quad (5)$$

(2) 迭代处理

步骤 1: 校验节点消息处理。对所有的校验节点 j 和与其相邻的校验节点 $i \in R(j)$ ，第 l 次迭代时，计算变量节点传向校验节点的消息

$$L^l(r_{ji}) = 2 \tanh^{-1} \left(\prod_{i \in R_j \setminus i} \tanh \left(\frac{1}{2} L^{(l-1)}(q_{ij}) \right) \right) \quad (6)$$

步骤 2: 变量节点消息处理。对所有的节点变量 i 和与其相邻的校验节点 $j \in C(i)$ ，第 l 次迭代时，计算校验节点传向变量节点的消息

$$L^l(q_{ij}) = L(P_i) + \sum_{j \in C_i \setminus j} L^l(r_{ji}) \quad (7)$$

步骤 3: 译码判决。对所有的变量节点计算硬判决消息

$$L^l(q_i) = L(P_i) + \sum_{j \in C_i} L^l(r_{ji}) \quad (8)$$

若 $L^l(q_i) > 0$ ，则 $\hat{c}_i = 0$ ，否则 $\hat{c}_i = 1$ 。

(3) 停止

若 $H\hat{c}^T = 0$ 或者达到最大迭代次数，则结束运算，否则从步骤 1 继续迭代。

2.2 BMA 算法

BMA 算法是一种基于可信度的译码算法，它是基于[9]首先引入的一个概念而提出来的。BMA 算法的计算代价与 OSD 算法计算代价的平方根大致相等^[12]，但是对内存的需求增加了。BMA 译码时除了考虑所有最可信信息集合 (MRB) 汉明码重量至多为 i 的错误矢量码字外，还考虑了在 S 个最可信位置 (MRPs) 上汉明重量至多为 $2i$ 错误矢量的所有码字，这里 $0 \leq S \leq (n-m)$ 。这种译码算法就称为 $BMA(i, S)$ ，且 MRB 外的 S 个 MRPs，称之为控制带 (CB)。

BMA 算法^[12]主要包含两个部分：(1) 从生成矩阵 G 出发，构建最可靠的信息集合 (MRB)，与 OSD 算法处理相同^[5]；(2) 系统处理由 MRB 生成的候选码字。这个过程包括两个重要的处理过程：(a) 从候选码字中寻找最小码重码字的处理过程 (Procedure Process (P))；(b) 利用由控制带 (CB) 生成的 2^S 个盒 (boxes) $B[\sigma]$ ($\sigma \in F_2^S$) 进行错误模式的匹配处理的过程 (Procedure Match)。

BMA(i, S) 算法的平均码字列表长度为:

$$n_{BMA(i, k, S-k)} \approx \binom{k}{i} + 2^{-S} \binom{S+k}{2i}, k = n-m \quad (9)$$

进一步讲, BMA(i, S) 算法匹配的 S 图案的数目小于 $2 \sum_{j=0}^i \binom{S-k}{j} \approx 2 \binom{S-k}{i}$, 并且所需内存的代价为: 2^S 。详尽的 BMA 译码算法可以参见[12]。

2.3 BP-BMA 级联译码算法

BP-BMA 级联算法在第 k 次迭代按如下方式进行:

1) BP 的 LLR 更新: 利用 LDPC 码的校验矩阵进行 LLR 的 BP 迭代更新处理, 并对更新后的 LLR 进行硬判生成码字 $\hat{\mathbf{c}}$: 若 $\mathbf{L}_{n'}^k \geq 0$ 则 $\hat{c}_i = 0$, 反之, $\hat{c}_i = 1$ 。然后判断 $\mathbf{H}\hat{\mathbf{c}}^T = 0$ 是否成立, 若成立, 则译码结束, 否则将 LLR 作为 BMA 译码算法的软输入, 进行下一次迭代。

2) BMA 译码: 利用 BP 迭代译码算法输入的 LLR 构建最可靠的信息集合 (MRB), 然后进行重处理和盒匹配处理。将上述每一次迭代的码字保存起来, 等达到 BP 迭代译码的最大次数时, 进行 $\mathbf{D}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{c}}) = \sum_{i: \hat{c}_i \neq 0} |y_i|$ 计算, 这里的 y_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) 是上节中的 AWGN 信道的输出, 并且从 $\mathbf{D}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{c}})$ 中选择 $\mathbf{D}_{\min}$ 的 BMA 译码 $\hat{\mathbf{c}}$ 作为最终的输出。

3 对数似然比累积算法

在 BP-BMA 级联算法中, BMA 算法利用 BP 算法软输出 $\mathbf{L}_{n'}^k$ 作为可信度信息 $\mathbf{r}_{n'} = [\mathbf{L}_{n'}^k] \mid n' \in [1, n]$, 进行 BMA 重处理生成码字。针对当 BP 迭代达到最大的迭代次数 $N_{\max}$ 时, BP 迭代中 $\mathbf{L}_{n'}^k$ 硬判 $\hat{c}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 在 0 与 1 间来回震荡, 仍不能生成一个有效码字这种情形, 采用文献[7]提出的对输出对数似然量进行累积, 并把其作为 BMA 算法的软输入和可信度的度量。文献[7]给出了两种似然累积算法:

$$(1) \mathbf{r}_{n'} = \sum_{k=0}^{N_{\max}} u^{N_{\max}-k} \mathbf{L}_{n'}^k, n' \in [1, n] \quad (10)$$

(2) 采用了一种类似 IIR 滤波器的结构:
初始 LLRs:

$$\mathbf{L}_{n'} = \mathbf{L}_{n'}^0, n' \in [1, n] \quad (11)$$

$$\mathbf{L}_{n'} = \mathbf{L}_{n'}^k + u \mathbf{L}_{n'}^k, k \in [1, N_{\max}] \quad (12)$$

$$\mathbf{r}_{n'} = [\mathbf{L}_{n'}^k] \mid n' \in [1, n] \quad (13)$$

其中, u 为衰减平衡因子, 关于 u 的取值讨论可以参见文献[7]。在后面的仿真中, 将 u 固定取 0 或 1, 并且采用第二种似然累积算法结合 BP-BMA 算法进行短 LDPC 码的译码。

4 BP-BMA 级联译码算法的复杂度分析

针对短 LDPC 码提出的 BP-BMA 级联译码算法, 译码复杂度相对于 BP-OSD 级联译码算法降低了许多, 这主要是因为 BMA 译码算法的计算代价与 OSD 计算代价的平方根大致相等^[8]。并且将 BP 迭代译码算法和 BMA 译码算法级联之后, 不管是 BP 迭代次数, 还是 BMA 算法的迭代次数均相应的降低了, 这有利于提高译码的速度, 体现了实时性。Fossorier 提出的 BP-OSD 级联算法在译码复杂度和性能间获得了较好的折中^[6], 可见 BP-BMA 级联算法则取得了更好的折中。

通过将姜明的对数似然比累积思想 (LLR Accumulation) 引入到 BP-BMA 级联算法中, 可以获得更好的译码性能。另外, 还可将 Fossorier 提出的 IISR (information iterative set reduction)^[11] 算法引入到 BP-BMA 级联算法中, 短 LDPC 码的译码性能将会获得进一步提升。

5 仿真结果及分析

针对短 LDPC 码的译码, 提出了一种新的级联译码算法 BP-BMA 级联译码算法, 并且进行了计算机仿真。具体的仿真条件为: 仿真采用的码字为: Gallager 方式生成的短 LDPC (256, 128) (3, 6) 规则码 (注: 该码的行重为 3, 列重为 6) 和 Mackay 方式生成的短 LDPC (155, 125) 非规则码; 调制方式采用 BPSK; 信道为 AWGN 信道; 基本硬件: CPU 为 AMD X2, 内存为 1GB。具体的性能仿真如图 1 至图 4 所示。

图 1 至图 4 中的图标说明: OSD (i) 和 BMA (i, S), i 代表重处理的阶数; BP-OSD (i)-F/J 和 BP-BMA (i, S)-F/J 中的 F 表示采用 Fossorier 方式的级联方式, J 表示采用姜明 (Jiang Ming) 方式的级联, 即 u 等于 1。为了在译码复杂度和性能间取得好的折中, 这里重处理的阶数 i 取 0 或 1。

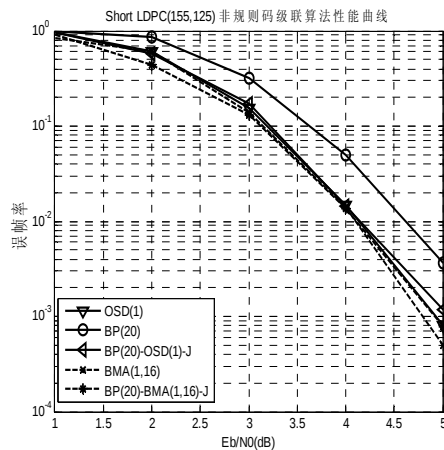


Figure 1. The decoding performance of reprocessing concatenated algorithm at zero order for short LDPC (155,125) irregular code
图 1. 短 LDPC(155,125)非规则码 0 阶重处理级联算法译码性能

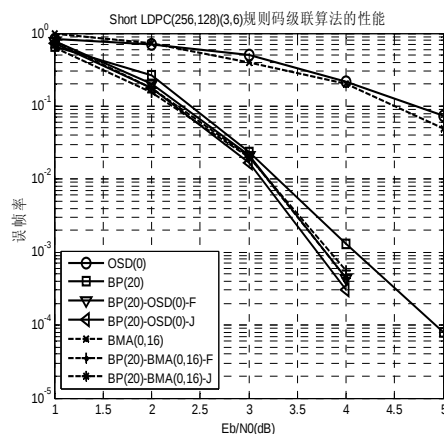


Figure 2. The decoding performance of reprocessing concatenated algorithm at zero order for short LDPC (256,128) (3,6) regular code
图 2. 短 LDPC(256,128)(3,6)规则码 0 阶重处理级联算法译码性能

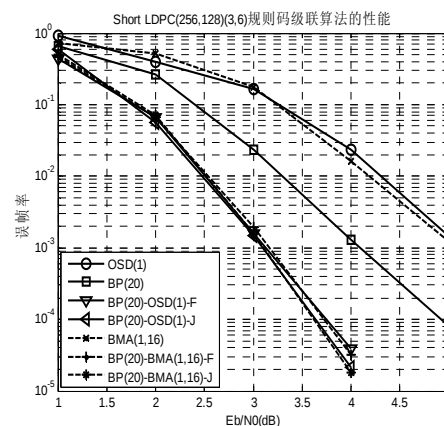


Figure 3. The decoding performance of reprocessing concatenated algorithm at one order for short LDPC (155,125) irregular code
图 3. 短 LDPC(155,125)非规则码 1 阶重处理级联算法译码性能

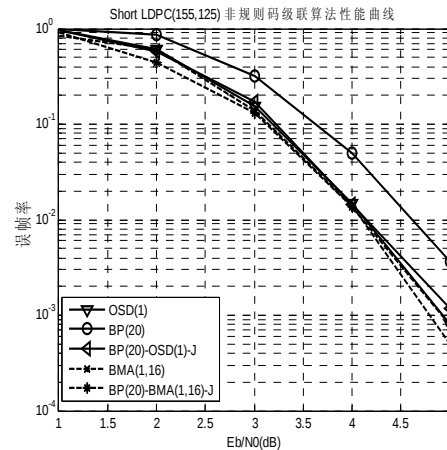


Figure 4. The decoding performance of reprocessing concatenated algorithm at one order for short LDPC (256,128) (3,6) regular code
图 4. 短 LDPC(256,128)(3,6)规则码 1 阶重处理级联算法译码性能

Note: Figure 1 to 4 compare the performances of BP-BMA and BP-OSD concatenated algorithm for short LDPC codes, the maximum iterative times for BP and the concatenated BP algorithm is 20.

注: 图 1 至图 4 比较了短 LDPC 码的 BP-BMA 和 BP-OSD 级联算法性能, BP 和 BP 级联算法的最大迭代次数均为 20。

从图 1 至图 4 中, 可以看出对短 LDPC 码单独采用 BMA 译码算法比单独采用 OSD 译码算法获得的译码增益有所提高; BP-BMA-F 级联算法的译码性能与 BP-OSD-F 相比稍好; BP-BMA-J 级联算法比 BP-BMA-F 取得的译码性能好。更重要的是, 采用 BP-BMA 级联算法可以获得比 BP 迭代译码更好的译码性能, 且在译码性能和复杂度间取得了好的折中。例如: 在图 4 中, $FER = 10^{-4}$ 时, BP-BMA(1,16)-J 比 BP 提高近 1.2dB, 而且比 BP-OSD (1) -J 译码复杂度低。

图 5 反映的是几种级联算法正确译出一帧短 LDPC (155,125) 码平均所需时间与信噪比的关系。从该图中可以看出, 相同信噪比条件下, 采用两种级联方式的 BP-BMA 算法正确译码所需的平均时间均比 BP-OSD 短, 即其对应的译码复杂度较低。

6 结束语

为了提高短 LDPC 码的纠错性能, 本文提出了一种新的 BP-BMA 级联算法, 然后分别采用 Fossorier 和 JiangMing 的级联模式进行级联和计算机的仿真。仿真结果表明, 与 BP-OSD 相比, 提出的 BP-BMA 级联算法不仅译码性能得到相应的提高, 而且译码复杂度也有所降低, 在译码复杂度和译码性能间取得了较好的折中。

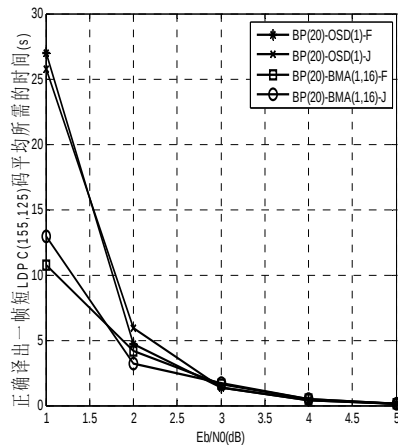


Figure 5. The relation between the average decoding time (s) and Signal-to-Noise Ratio, in that duration one frame of the short LDPC(155,125) code is decoded correctly, for the four kinds of concatenated algorithms

图 5. 四种级联算法正确译出一帧短 LDPC(155,125)码平均所需时间 (s) 与信噪比的关系

References (参考文献)

- [1] Gallager R G. Low density parity check codes[J]. IEEE Trans on Inform. Theory, 1962,8(1):21-28.
- [2] Wang L. Application of LDPC for digital TV terrestrial broadcasting system[D]. Nanjing, Southeast University, 2006.
- [3] Andrews K, Dolinar S. Design of Low-Density Parity-Check (LDPC) Codes for Deep-Space Applications[EB/OL]. IPN Progress Report, 2004:42-159.
- [4] Kachinschang F, Frey B J. and Loeliger A. Factor graphs and the sum-product algorithm[J]. IEEE Trans on Inform. Theory, 2001,47(1):498-519.
- [5] Fossorier M, Lin S. Soft decision decoding of linear block codes based on ordered statistics[J]. IEEE Trans on Inform. Theory, 1995,41(5):1379-1396.
- [6] Fossorier M. Iterative reliability-based decoding of low-density parity check codes[J]. IEEE J Sel Areas Commun, 2001,19(5):908-917.
- [7] Jiang M, Zhao C M, and Xu E. Reliability based iterative decoding of LDPC codes using likelihood accumulation[J]. IEEE Commun. Letters, 2007,11(8): 677-679.
- [8] Fossorier M, Valembois A. Reliability based decoding of Reed-Solomon codes using their binary image[J]. IEEE Commun. Letters, 2004,8(7):452-454.
- [9] Stern J. A method for finding codewords of small weight[EB/OL]. Lecture Notes in Computer Science, 1989, 388(1):106-113.
- [10] Martin P A, Valembois A and Fossorier M. On soft-input soft-output decoding using box and match techniques[J]. IEEE Trans on Commun. 2004,52(12): 2033-2037.
- [11] Fossorier M. Reliability based soft decision decoding with iterative information set reduction[J]. IEEE Trans. on Inform. Theory, 2002,48(12): 3101- 3106.
- [12] Valembois A, Fossorier M. Box and match techniques applied to soft decision decoding[J]. IEEE Trans on Inform. Theory, 2004,50(5):798-810.