

# Stopping Criterion Based on Symbol Reliable Measure for MMSE Turbo Equalization

LIN Haitao, DOU Gaoqi, TAO Wei, GAO Jun

Department of Communication Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan, China, 430033 e-mail: gadou0917@163.com

**Abstract:** By analyzing the relation of the symbol reliable measure (SRM) parameters and the convergence characteristic of MMSE Turbo equalization, a novel stopping criterion based on SRM is proposed, which uses the symbol reliable measure parameters to dynamically control the iteration number. The stopping criterion based on SRM is independent of modulation mode, signal-to-noise ratio (SNR) and frame sizes and can be used for filtered-based MMSE equalizer. Simulations confirm the new stopping criterion can reduce the average iterations and computational complexity efficiently with a negligible degradation of the error performance.

Keywords: Turbo equalization; stopping criterion; symbol reliable measure; delta mean; MMSE

# 基于符号可靠性度量的 MMSE Turbo 均衡停止准则

林海涛, 窦高奇, 陶 伟, 高 俊

海军工程大学 通信工程系,武汉,中国,430033 e-mail: gqdou0917@163.com

【摘 要】通过分析均衡输出符号可靠性度量参数与均衡收敛性能的关系,提出了一种基于符号可靠性度量(SRM)的 MMSE Turbo 均衡停止准则。该停止准则利用符号可靠性参数的变化量来动态调整迭代次数,与调制方式、信噪比和帧长无关,适用于基于滤波结构的 MMSE Turbo 均衡器。仿真表明,SRM 停止准则在不降低误码性能的情况下,可以有效降低迭代均衡的平均迭代次数,减少 Turbo 均衡的运算量。

【关键词】Turbo 均衡;停止准则;符号可靠性度量;最小均方误差

#### 1 引言

Turbo 均衡技术是多径衰落信道下对抗码间干扰 (Intersymbol interference, ISI) 的有效措施[1], 它将通 信中的码间干扰现象看作发送符号的卷积,将信道编 码、交织器和多径信道的级联看作是串行级联卷积 码,通过迭代的方式来提高性能。基于最大后验概率 (Maximum a Posteriori, MAP) 的 Turbo 均衡器有效 利用 ISI 信道的网格结构,它能为译码器提供最佳的 后验似然比信息,从而极大地提高整个迭代检测系统 的性能。然而,基于网格的均衡性能提高是以牺牲计 算量为代价的,其计算量随调制阶数 M 和信道抽头数 L 成指数增长,直接制约其在通信系统中的应用。因 此,设计低复杂度 Turbo 均衡器成为近年来研究的热 点,一方面是寻求低复杂度的软输入软输出(Soft Input Soft Output, SISO)均衡器来代替 MAP 均衡器,包括 基于滤波结构的线性最小均方误差(Linear Minimum Mean Squared Error, LMMSE) 均衡器<sup>[2]</sup>; 基于判决反 馈的非线性 SISO 均衡器<sup>[3]</sup>及干扰抵消器<sup>[4,5]</sup>等;另一方面是选择合适的停止准则来减少平均迭代次数。当 迭代达到一定次数后,其性能不再随迭代次数的增加 而改善,此时如果及时终止迭代,可以在不降低性能的情况下,有效减少迭代时延和运算量。

由于 Turbo 均衡的迭代过程与 Turbo 码相似,因此可以采用类似于 Turbo 码的停止准则来终止迭代。 Turbo 码的停止准则主要交叉熵最小化停止准则<sup>[6]</sup>、符号改变率和辅助硬判决法 <sup>[7]</sup>、符号差别率 <sup>[8]</sup>以及循环冗余校验 <sup>[9]</sup>等。在实际系统中,这些停止准则都存在各种不足,如计算复杂、存储量大、与帧长和信噪比有关、参数设计不灵活以及不同程度的性能下降等。目前 Turbo 均衡大都采用设置最大迭代次数的方法来终止迭代。为了避免性能的下降,最大迭代次数的取值一般都比较大。因此,Turbo 均衡经常会出现迭代多次性能不再提高的情况,此时如果能够采用一种停止准则提前预知 Turbo 均衡性能的变化趋势,当性能不再提高时及时终止迭代,从而避免大量的无谓运算。



基于滤波结构的 SISO 均衡器由于复杂度很低而倍受关注。Tüchler 等在传统 MMSE 均衡器的基础上,引入译码先验信息,提出线性时变滤波结构的 LMMSE 均衡器<sup>[2]</sup>。文献[10]对其进行扩展,给出了多进制调制方式下 LMMSE 均衡器的统一结构和表达式。本文首先对 LMMSE 均衡器输出符号的可靠性进行分析,利用输出符号的可靠性度量的统计量来预测均衡性能的变化,在此基础上,提出了一种基于符号可靠性度量(Symbol Reliable Measure, SRM)的停止准则。该停止准则利用可靠性度量值的变化规律来控制迭代次数,该停止准则与调制方式、信噪比和帧长无关。

### 2 LMMSE 均衡结构模型

二进制信息比特  $b_k$  经卷积编码后得序列  $d_k$  ,  $d_k$  经 交 织 器 交 织 后  $c_n = \prod(d_k)$  被 分 成 N 个 子 块  $C = [c_1, c_2, L, c_N]$  , 每 一 子 块 为 Q 长 的 比 特 序 列  $c_n = [c_{n,1}, c_{n,2}, L, c_{n,Q}]$  。 子 块  $c_n$  经 M 进制调制后映射 成 符 号  $x_n$  , 其中,  $Q = \log_2 M$  ,  $x_n \in \{\alpha_1, \alpha_2, L, \alpha_M\}$  。 子 块  $c_n$  与  $x_n$  的 映 射 关 系 由 比 特 序 列 集 合  $\Omega = \{s_1, s_2, L, s_M\}$  到 符 号 序 列 集 合  $S = \{\alpha_1, \alpha_2, L, \alpha_M\}$  的 一 对 应 关 系 确 定 , 其 中 ,  $s_m = \{s_{m,1}, s_{m,2}, L, s_{m,Q}\}$  。 我 们 采 用 等 效 基 带 时 不 变 ISI 信 道 模 型 [11] , 其 等 效 抽 头 系 数 为  $\{h_k\}_{k=0}^{L-1}$  。 符 号 序 列  $x_n$  经 ISI 信 道 输 出 为

$$r_{n} = Hx_{n} + w_{n} \tag{1}$$

其中,H 为信道卷积矩阵, $w_n$  为实部和虚部独立的复高斯噪声序列,其均值为零,方差为 $\sigma_w^2$ 。

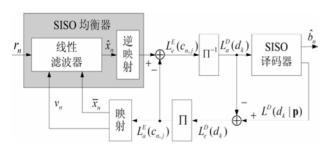


Figure 1. The structure of LMMSE equalization system 图 1. LMMSE 均衡系统框图

Turbo 均衡器包括 SISO 均衡器和 SISO 译码器, SISO 均衡器利用接收符号计算每个编码比特的外信 息  $L_e^{\ell}(c_{n,i})$ 。LMMSE 均衡器将  $L_e^{\ell}(c_{n,i})$ 的计算分为两 步,如图 1 所示,首先基于 MMSE 准则利用长度为  $N=N_1+N_2+1$  的时变 FIR 滤波器来计算发送符号  $x_n$  的估计  $\hat{x}_n$ ,然后在假定  $\hat{x}_n$  服从独立高斯分布的情况下计算相应的外信息  $L_e^E(c_{n,j})$ 。在计算滤波器输出时考虑了译码反馈的信息  $L_e^D(c_{n,j})$ ,其影响由发送符号的先验均值  $\bar{x}_n$  和先验方差  $v_n$  反映。

为了推导方便,我们用  $E(\cdot)$  和  $Cov(\cdot)$  表示期望和协方差运算, $diag(\cdot)$  表示对角运算, $I_N$  表示  $N \times N$  的单位阵, $O_{M \times N}$  表示  $M \times N$  的全零阵。利用 MMSE 准则,可以求得滤波系数和估计符号分别为[10]

$$\boldsymbol{f}_{n} = \sigma_{s}^{2} \cdot \left(\sigma_{w}^{2} \boldsymbol{I}_{N} + \boldsymbol{H} \boldsymbol{V}_{n} \boldsymbol{H}^{H}\right)^{-1} \boldsymbol{h}$$
 (2)

$$\hat{x}_n = f_n^H (r_n - H\overline{x}_n) \tag{3}$$

其中, $\overline{\mathbf{x}}_n = [\overline{x}_{n-N_2-L+1}, \mathbf{L}, \overline{x}_{n-1}, \mathbf{0}, \overline{x}_{n+1} \mathbf{L}, \overline{x}_{n+N_1}]^T$ , $\mathbf{V}_n = \operatorname{diag}(v_{n-N_2-L+1}, \mathbf{L}, v_{n-1}, \sigma_s^2, v_{n+1} \mathbf{L}, v_{n+N_1})$ , $\mathbf{h} = \mathbf{H}[\mathbf{0}_{1 \times N_s + I-1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}_{1 \times N_s}]^T$ , $\sigma_s^2$ 为符号能量。

为了求得  $L_e^E(c_{n,j})$ ,需要知道  $\hat{x}_n$  的分布特性。 LMMSE 均衡器在计算  $L_e^E(c_{n,j})$  时认为均衡器已经消除了叠加在符号  $x_n$  上的 ISI。此时  $\hat{x}_n$  可以等效高斯信道输出

$$\hat{x}_n = \mu_n x_n + \eta_n \tag{4}$$

其中, $\mu_n = \mathbf{f}_n^H \mathbf{h}$  且有  $0 \le \mu_n \le 1$ , $\eta_n$  为均值为零,方 差为  $\sigma_n^2$  的复白高斯噪声,其值分别为<sup>[10]</sup>

$$\mu_n = \boldsymbol{f}_n^H \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^H \left( \boldsymbol{\sigma}_w^2 \boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{H} \boldsymbol{V}_n \boldsymbol{H}^H \right)^{-1} \boldsymbol{h} \boldsymbol{\sigma}_s^2$$
 (5)

$$\sigma_n^2 = E\left(\left|\eta_n\right|^2\right) = \sigma_s^2(\mu_n - \mu_n^2) \tag{6}$$

则均衡器输出的外信息为

$$L_{e}^{E}(c_{n,j}) = \ln \frac{\sum_{\alpha_{k} \in S_{j}^{(0)}} \exp\left(-\frac{|\hat{x}_{n} - \mu_{n}\alpha_{k}|^{2}}{\sigma_{n}^{2}}\right) \prod_{\forall j: j \neq j} P\left(c_{n,j} = s_{k,j}\right)}{\sum_{\alpha_{k} \in S_{j}^{(1)}} \exp\left(-\frac{|\hat{x}_{n} - \mu_{n}\alpha_{k}|^{2}}{\sigma_{n}^{2}}\right) \prod_{\forall j: j \neq j} P\left(c_{n,j} = s_{k,j}\right)}$$
(7)

其中, $\mathbf{S}_{j}^{(b)} = \left\{ \alpha_{k} \mid \mathbf{s}_{k} \in \Omega : \mathbf{s}_{k,j} = b \right\}$  表示当序列  $\mathbf{s}_{k}$  中第 j 比特  $\mathbf{s}_{k,j} = b$  时所对应的所有  $\alpha_{k}$  的集合。

## 3 输出符号可靠性度量(SRM)停止准则

#### 3.1 可靠性度量值分析

式(4)将LMMSE均衡器输出等效为均值为  $\mu_n \alpha_k$ , 方差为  $\sigma_n^2$  的高斯信号,其中,  $\mu_n \in [0,1]$  是等效信道



增益<sup>[4,5]</sup>,反映输出符号的可靠程度,称  $\mu_n$  为输出符号  $\hat{x}_n$  的可靠性度量因子。由式(6)可以看出,方差  $\sigma_n^2$  与可靠性度量因子有关,当  $\mu_n=0$  时,  $\sigma_n^2=\sigma_s^2$  ,此时均衡输出为一均值为零,方差为  $\sigma_s^2$  的高斯噪声;当  $\mu_n=1$  时,  $\sigma_n^2=0$  ,此时均衡输出  $\hat{x}=x_n$  。随着迭代次数的增加, $\mu_n$  会逐渐趋于 1,方差  $\sigma_n^2$  会逐渐趋于零。因此,  $\mu_n$  和  $\sigma_n^2$  值的大小都反映了均衡输出符号的好坏程度,我们对其进行统计平均,记为  $\overline{\mu}_n$  和  $\overline{\sigma}_n^2$  ,分别称其为可靠性均值和可靠性方差。统计量  $\overline{\mu}_n$  和  $\overline{\sigma}_n^2$  ,反映了输出符号的平均可靠程度,在迭代过程中可以设定一门限值,当  $\overline{\mu}_n$  和  $\overline{\sigma}_n^2$  可以作为迭代停止准则的判据。

为了消除符号能量对方差的影响,我们将方差进行归一化处理,即  $\overline{\rho}_n^2 = \overline{\sigma}_n^2/\sigma_s^2$ ,其中,  $\overline{\rho}_n^2 \in [0,1]$ 。图 2 给出了 QPSK、8PSK 和 16QAM 方式下,LMMSE 均衡器经过 10 次迭代后  $\overline{\mu}_n$  和  $\overline{\rho}_n^2$  与信噪比的关系。由图 2 可以看出,不同调制方式下,随着  $E_b/N_0$  的增大,均值  $\overline{\mu}_n$  会逐渐增大,方差  $\overline{\rho}_n^2$  会逐渐减小,反映了随着  $E_b/N_0$  的增大,输出符号的可靠程度逐渐提高;同时可以看出,各种调制方式下的均值  $\overline{\mu}_n$  和方差  $\overline{\rho}_n^2$  基本相同,调制方式对其影响不大。图 3 给出  $E_b/N_0$  =8dB、8PSK 调制方式下,不同帧长时  $\overline{\mu}_n$  和  $\overline{\rho}_n^2$  对帧长的变化不敏感,这是由于  $\overline{\mu}_n$  和  $\overline{\rho}_n^2$  采用的是一帧内的统计平均,反映的是均衡输出符号的平均可靠程度,当迭代收敛后,输出符号不再变化,反映符号可靠程度的  $\overline{\mu}_n$  值将不再变化。

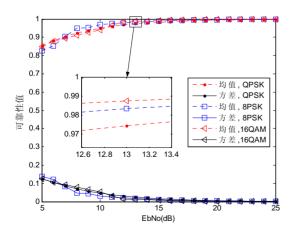


Figure 2. The mean and variable of different SNR 图 2. 不同信噪比下可靠性均值和方差

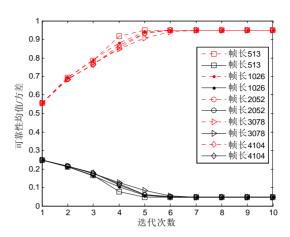


Figure 2. The converge curves of mean and variable with iteration for 8PSK

图 3.8PSK 方式下均值和方差随迭代次数的变化趋势

第 l 次迭代时的均值和方差分别记为  $\overline{\mu}_n^{(l)}$  和  $\overline{\rho}_n^{(l)}$ ,定义可靠性均值和方差的变化量分别为

$$\nabla \mu = \overline{\mu}_n^{(l)} - \overline{\mu}_n^{(l-1)}$$
$$\nabla \rho^2 = \overline{\rho}_n^{2(l)} - \overline{\rho}_n^{2(l-1)}$$

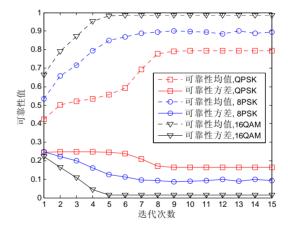


Figure 4. The mean and variable is varied with iterations 图 4. 均值和方差随迭代次数的变化情况

图 4 给出了 QPSK、8PSK 和 16QAM 调制方式下,可靠性度量  $\bar{\mu}_n$  和方差  $\bar{\rho}_n^2$  随迭代次数的变化情况,图 5 是对应条件下的  $\nabla \mu$  和  $\nabla \rho^2$  随迭代次数的变化趋势,其中,QPSK 和 16QAM 可以通过迭代收敛到正确值,而 8PSK 无法正确收敛。由图 4 以看出,随着迭代次数的增加,三种调制方式中  $\bar{\mu}_n$  逐渐增大,同时  $\bar{\rho}_n^2$  逐渐减小,进一步增大迭代次数时,  $\bar{\mu}_n$  和  $\bar{\rho}_n^2$  都将趋于平稳;不同的是,QPSK 和 16QAM 由于可以正确收敛, $\bar{\mu}_n$  和  $\bar{\rho}_n^2$  稳定后基本不变, $\nabla \mu$  和  $\nabla \rho^2$  近似为零;



而 8PSK 由于无法正确收敛,随着迭代次数增大,  $\bar{\mu}_n$  和  $\bar{\rho}_n^2$  趋于平稳后存在振荡现象, $\nabla \mu$  和  $\nabla \rho^2$  的波动都比较大。大量的仿真表明,当迭代过程能正确收敛时,随着迭代次数的增加,  $\bar{\mu}_n$  是单调递增直至平稳不变,而当迭代无法正确收敛时,  $\bar{\mu}_n$  和  $\bar{\rho}_n^2$  随迭代次数增加趋于平稳后会出现时大时小的波动。因此,我们可以将  $\bar{\mu}_n$  和  $\bar{\rho}_n^2$  的变化量  $\nabla \mu$  和  $\nabla \rho^2$  作为迭代停止的条件,该停止准则称为输出符号可靠性度量(SRM)停止准则。

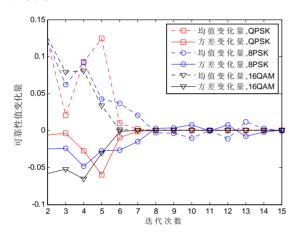


Figure 5. The measure of mean and variable vary with iteration 图 5 均值和方差变化量随迭代次数的变化情况

#### 3.2 停止准则设计

前面分析了不同信噪比、调制方式以及帧长与可 靠性均值  $\overline{\mu}_{n}$  和方差  $\overline{\rho}_{n}^{2}$  之间的关系,可以得出,均值 变化量 $\nabla u$  的大小可以作为停止准则和迭代收敛与否 的判据。我们以 $\nabla \mu$ 作为迭代停止准则的判据, $\nabla \mu$ 的 大小和正负可作为迭代收敛与否的判据。这是因为随 着迭代次数的增加,输出符号的可靠程度会逐渐增大 直至稳定,因此在迭代过程中应该满足 $\nabla \mu \geq 0$ ,当迭 代无法收敛时,则会出现 $\nabla \mu < 0$ ,此时一般认为迭代 无法收敛到正确值。根据迭代收敛与否可以设计两级 判据,第一级针对迭代能正确收敛的情况,设计上限 值UT。当 $|\nabla \mu|$ <UT时,认为输出符号可靠性很高且  $\bar{\mu}_n$ 已趋于稳定,可以终止迭代,UT 一般取 0.001  $\sim$ 0.01 之间。第二级针对迭代无法收敛的情况。采用固 定迭代次数 $I_s$  ( $I_s < I_{max}$ )与门限值相结合的方法。 对 $\nabla \mu$ 设计一下限值DT,DT一般大于0.01。经 $I_s$ 次 迭代之后,在后续迭代中如果检测 $|\nabla \mu| > DT$ 或  $\nabla \mu < 0$ ,则认为迭代无法收敛,可以终止迭代。由前 面分析可知, 当迭代可以正确收敛时, 经过若干次迭 代后,均值  $\overline{\mu}_n$  趋于一定值,波动很小甚至为零,而当 迭代无法收敛时,经过若干次迭代  $\overline{\mu}_n$  趋于平稳时波动 较大。此时及时终止迭代则可避免无谓的运算。

#### 4 仿真分析

通过实验对比本文提出的 SRM 停止准则与理想停止准则在平均迭代次数和误比特率性能之间的对比。所谓理想停止准则是假定接收端已知发送序列,当收端译码序列与发送序列完全相同时停止迭代<sup>[7]</sup>。仿真使用码率 R=1/2 的递归系统卷积码(RSC),其生成多项式用八进制表示为 g=[13,15]。数据按帧发送,每个数据帧包括 2052 个编码比特。译码器采用简化的 MAX-LOG-MAP 算法<sup>[12]</sup>。仿真信道采用文献中的 Proakis C 信道,该信道会产生严重的  $ISI^{[11]}$ ,假定信道在一帧内是恒定不变的。

图 6 给出了 8PSK 调制方式下,上限参数 UT = 0.01和 0.005 时对平均迭代次数的影响, 其中, 最大迭代 次数  $I_{\text{max}} = 10$ ,  $I_{\text{s}} = 5$ ,二级门限对应的 DT = 0.02。由 图 6 可以看出, 当上限参数 UT 的减小, 相同信噪比 下的迭代次数会增大,但影响主要表现在中、低信噪 比。这是因为,当信噪比较大时, $\bar{\mu}_n$ 会随迭代次数迅 速增大到平稳状态,间隔 $\nabla \mu$ 会迅速减小到零,当UT较小时对其影响不大;而当信噪比降低时, $\bar{\mu}$ ,随迭代 缓慢增大到平稳状态,此时,间隔 $\nabla \mu$ 与门限UT相 近, UT 的大小对迭代次数影响较大。与理想停止准 则相比,在低信噪比下 SRM 准则可以及时终止迭代, 从而避免均衡无法收敛时需要达到最大迭代次数才能 终止;而在较高信噪比下,SRM 准则比理想准则的平 均迭代次数多大约一次左右,这主要是由于 SRM 准 则采用前后两次迭代的差值来判断均值是否稳定,在 迭代收敛后(此时 $\bar{\mu}_n$ 刚好平稳)还需一次迭代来检测  $\bar{\mu}$ . 是否稳定。图 7 给出了不同参数下的 BER 曲线, 可以看出,在低信噪比时利用本文提出的 SRM 停止 准则的 BER 性能要略好于理想停止准则下的性能,这 是因为在迭代无法收敛时, SRM 准则可以及时终止迭 代,避免了进一步迭代造成性能的恶化;随着信噪比 的增大,在 BER 的瀑布区,新准则下的 BER 性能要 比理想准则时的略差,且与UT的大小有关,门限值 越小,误码曲线越逼近理想准则的性能;在高信噪比 时新准则与理想准则的性能一致。



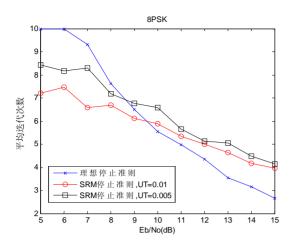


Figure 6. The compare curves of average iteration for different stopping criterions

图 6 不同停止准则下的平均迭代次数比较

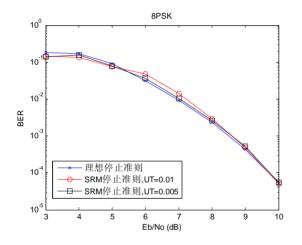


Figure 7. The BER curves of different stopping criterions 图 7 不同停止准则下的误码性能曲线

#### 5 结语

本文首先对 LMMSE 均衡器输出符号的可靠性进行分析,利用输出符号的可靠性度量参数的统计量来预测均衡性能的变化,在此基础上,提出了一种基于

符号可靠性度量(SRM)的停止准则。该停止准则利用可靠性度量值的统计量的变化规律来控制迭代次数,与调制方式、信噪比和帧长无关,对基于滤波结构的 Turbo 均衡具在一定的通用性和实用价值。

# References (参考文献)

- [1] DOUILLARD C, JEZEQUEL M, BERROU C. Iterative correction of intersymbol interference: Turbo equalization. European Transactions on Telecommunications[J], 1995, 6(5): 507–511.
- [2] TÜCHLER M, SINGER A C, KOETTER R. Minimum mean squared error equalization using a-priori information[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(3):673-683.
- [3] LOPES R R, BARRY J R. The soft-feedback equalizer for Turbo equalization of highly dispersive channels[J]. IEEE Trans. Commun., 2006, 54(5): 783–788.
- [4] WU Z N, CIOFFI J. Low complexity iterative decoding with decision-aided equalization for magnetic recording channels[J]. IEEE Joural Selected Areas in Communications, 2001, 19(4): 699-708.
- [5] LAOT C, LEBIDAN R, LEROUX, D. Low-complexity MMSE turbo equalization: a possible solution for EDGE[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2005,4(3): 965-974.
- [6] HAGENAUER J, OFFER E, PAPKE L. Iterative decoding of binary block and convolutional codes[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1996, 42(2): 429–445.
- [8] WU Y, WOERNER B D, EBEL W J. A simple stopping criterion for turbo decoding[J]. IEEE Commun. Lett., 2000 4(8): 258–260.
- [9] SHIBUTANI A, SUDA H, ADACHI F. Reducing average number of tubo decoding iterations[J]. Electron. Lett., 1999, 35(9):, 701–702.
- [10] DEJONGHE A, VANDENDORPE L. Turbo-equalization for multilevel modulation: an efficient low-complexity scheme[C]. IEEE International Conference on Communications, 2002, 3:1836-1867.
- [11] PROAKIS J G. Digital Communication[M]. New York: McGraw-hill,2001.
- [12] VITERBI A J. An intuitive justification and a simplified implementation of the MAP decoder for convolutional codes[J]. IEEE Joural Selected Areas in Communications, 1998,16(2): 260–264.