

# Sliding-Mode Control of Structural Vibration Based on Acceleration Reaching Law

Liu Jianjun<sup>1</sup>, Xia Kaiquan<sup>1</sup>, Zhu Caixia<sup>2</sup>

1. Division of Engineering Mechanics, China Electric Power Research Institute, Beijing, China

2. College of Computer Science & Technology, Harbin Engineering University, Harbin, China

e-mail: lionsking@163.com, jj.zcx@163.com

**Abstract:** The sliding-mode control method is one of variable structural control methods. The sliding mode can be designed to be independent from the varieties of the system parameters and the disturbance of the environment. The system mode can resist the system parameters effectively and is self-adaptive to those varieties absolutely. The free accelerating law saturated control is presented in this paper. The performance and robustness of the multi-freedom system by proposed control law are investigated in numerical simulation. The results demonstrate that the response of the structure is diminished effectively and the robustness of the system is remarkable. This control strategy can be applied in the buildings practically.

**Keywords:** sliding-mode; acceleration reaching law; saturated control; structural vibration

## 基于加速度趋近律的结构振动滑模控制

刘建军<sup>1</sup>, 夏开全<sup>1</sup>, 朱彩霞<sup>2</sup>

1.中国电力科学研究院工程力学研究所, 北京, 中国, 100055

2.哈尔滨工程大学计算机与软件学院, 哈尔滨, 中国, 150001

e-mail: lionsking@163.com, jj.zcx@163.com

**【摘要】**滑模控制是变结构控制的一种, 通过恰当地设计可以实现滑动模态与系统参数摄动以及外界扰动完全无关。系统的模态具有完全的抗摄动性, 即具有对摄动的完全自适应性。本文采用自由递阶加速度趋近律饱和控制对多自由度体系的响应和鲁棒性进行数字仿真研究。仿真结果表明此控制律能够有效的减小结构的地震响应, 同时具有较好的鲁棒性。滑模自由递阶加速度趋近律饱和控制具有重要的实际应用价值。

**【关键词】**滑模; 加速度趋近律; 饱和控制; 结构振动

## 1 引言

变结构控制最早由苏联学者提出, 之后经过进一步深入和系统的研究, 已经成为现代控制理论的一个重要分支。九十年代初, 美国学者 J. N. Yang 首先将其中的滑模控制理论引入土木工程的振动控制领域。滑模控制与常规控制不同之处在于系统的结构可以在瞬变过程中, 根据系统当时的状态, 以跃变的方式, 有目的地变化, 迫使系统沿预定的“滑动模态”的状态轨迹运动或向其趋近。由于滑动模态可以设计且与控制对象的参数及扰动无关, 这使得滑模控制对外界扰动和系统内部参数的摄动具有完全的自适应性。

在结构振动控制中不可避免存在许多摄动和不确定性: (1) 系统建模过程中的不精确性, 例如运动方程中参数具有时变性, 参数确定的近似性或建立在某种假设的基础之上(例如阻尼的确定)。另外建模时非线

性因素的线性化、数学表达式的线性化都使得模型不精确; (2) 控制力施加过程中的摄动; (3)外界扰动的存在。本文采用的控制方法的优点正是在于能有效地抑制这些不确定性和摄动的影响, 使得系统对参数摄动和外界扰动变化不灵敏, 并具有响应快速等优点。

## 2 状态方程

选取 n 个自由度层间剪切结构模型, 在水平地震作用下, 结构控制系统的运动方程为:

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = G\ddot{\tilde{Y}}_g + HU(t) \quad (1)$$

其中 M、C、K 分别为 n×n 维的结构质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; Y、 $\dot{Y}$  和  $\ddot{Y}$  分别为 n 维的层间位移、速度和加速度向量; G 为 n×r 维外界干扰作用矩阵;  $\ddot{\tilde{Y}}_g$  为 1 维外界干扰作用(地震作用); H 为 n×r 维的控制装置的作用位置矩阵; U(t) 为 r 维控制向量。

在状态空间中，运动方程可以写为

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) + E\ddot{Y}_g \quad (2)$$

式中  $X$  为  $2n$  维状态向量；  $A$  为  $2n \times 2n$  维系统状态矩阵；  $B$  为  $2n \times r$  维控制输入矩阵；  $E$  为  $2n \times 1$  维外界干扰输入矩阵。

$$X(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ \dot{Y}(t) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} O \\ M^{-1}G \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} O & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ M^{-1}H \end{bmatrix}$$

### 3 滑移面设计

设滑动模态控制算法的切换函数为线性函数：

$$S = CX = 0$$

文中采用最优化方法设计切换函数。

设切换函数忽略外界作用，系统状态方程为：

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

将上式展开成为其简约型

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \\ \dot{X}_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + B_2U \\ S = C_1X_1 + C_2X_2 \end{cases} \quad (3)$$

其中  $X_1, X_2$  分别为  $2n-r$  维和  $r$  维状态向量。

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ B_2 \end{bmatrix}$$

式(3)中的第一式就是最终的滑动模态。又因为当  $(A, B)$  可控时， $(A_{11}, A_{12})$  可控，所以设计切换面

$$S = C_1X_1 + C_2X_2 = 0 \quad (4)$$

的问题等价于求(3)中第一式的反馈，即将  $X_2$  看作  $X_1$  的反馈：

$$X_2 = KX_1, \quad K = -C_2^{-1}C_1$$

使得最终滑动模态

$$\dot{X}_1 = (A_{11} + A_{12}K)X_1 \quad (5)$$

具有良好的品质。

设系统的最优评价指标为

$$J = \int_{t_0}^{\infty} X^T Q X dt \quad (6)$$

其中  $Q$  为正定的权矩阵。

将矩阵  $Q$  分块如下：

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad Q_{21}^T = Q_{12}$$

则

$$X^T Q X = \begin{bmatrix} X_1^T, X_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\ = X_1^T Q_{11} X_1 + 2X_1^T Q_{12} X_2 + X_2^T Q_{22} X_2$$

作状态变换：

$$\begin{cases} X_1 = X_1 \\ V = Q_{22}^{-1}Q_{21}X_1 + X_2 \end{cases} \quad (7)$$

则

$$X^T Q X = X_1^T Q_{11}^* X_1 + V^T Q_{22} V$$

其中

$$\begin{cases} Q_{11}^* = Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21} \\ A_{11}^* = A_{11} - A_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21} \end{cases} \quad (8)$$

此时(5)式变为

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= A_{11}^* X_1 + A_{12} V \\ J &= \int_{t_0}^{\infty} (X_1^T Q_{11}^* X_1 + V^T Q_{22} V) dt \end{aligned} \quad (9)$$

这样切换面的系数矩阵  $C$  的求解问题转化为由(9)式组成的系统的最优控制的求解问题。由(9)式可知，若下列的黎卡提方程

$$PA_{11}^* + A_{11}^{*T}P - PA_{12}Q_{22}^{-1}A_{12}^TP + Q_{11}^* = 0 \quad (10)$$

有唯一正定对称解  $P$  存在，使得：

$$V = -Q_{22}^T A_{12}^T P X_1 \quad (11)$$

则可得  $J$  的最优解。此时由

$$X_2 = V - Q_{22}^{-1}Q_{12}^T X_1 = -Q_{22}^{-1}(A_{12}^T P + Q_{12}^T)X_1 \quad (12)$$

可得

$$S = [C_1, C_2]X$$

其中

$$C = [C_1, C_2] = [A_{12}^T P + Q_{12}^T, Q_{22}] \quad (13)$$

### 4 控制律的确定

本文采用自由递阶加速度趋近律饱和控制。自由递阶控制指系统从任意初始状态按其自然趋势可以进入任意一个切换面，这完全决定于初始偏差  $X_0$ ，进入各个切换面的顺序完全是由系统自己确定的。这种控制具有较快的趋近速度，因而具有较强的鲁棒性，同时需要输入的外部能量也较少，还能减少抖振。加速度型趋近律的特点是当系统远离滑模切换面时，状态的收敛速度较快；当状态靠近滑模平面时，收敛速度又减慢。其结果就构成了一种高速收敛而且低抖动的到达控制律。考虑到实际控制装置提供的最大控制力的限制采用饱和控制。该控制的实现方法如下：

首先采用加速度型趋近律计算出所需施加的控制力。该控制律的表达式为：

$$U_1 = -(CB)^{-1}[CAX + Gf(S)] \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \text{sgn}(S) &= [\text{sgn}(s_1), \text{sgn}(s_2), \dots, \text{sgn}(s_r)] \\ f(S) &= [f_1(s_1), f_2(s_2), \dots, f_r(s_r)] \\ f_i(s_i) &= |s_i|^\alpha \text{sgn}(s_i), \quad (i = 1, 2, \dots, r) \\ G &= \text{diag}[g_1, g_2, \dots, g_r] \end{aligned}$$

$U_1$  为计算出来的控制力。其中  $s_i$  为向量  $S$  的第  $i$  个元素； $G$  和  $\alpha$  为可自由选择的参数，合理的确定这两个参数可以取得较好的控制效果。

其次，对上述求出来的控制力采用饱和控制算法计算实际施加的控制力。取控制装置所能提供的极限控制力为  $U_{\max}$ ，控制策略如下：

$$u_i = \begin{cases} u_{li}, & \text{abs}(u_{li}) \leq u_{\max i} \\ u_{\max i}, & \text{abs}(u_{li}) > u_{\max i} \end{cases},$$

其中  $U_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \dots \\ u_{1r} \end{bmatrix}$ ,  $U_{\max} = \begin{bmatrix} u_{\max 1} \\ u_{\max 2} \\ \dots \\ u_{\max r} \end{bmatrix}$  (15)

式 (14)，(15) 就是自由递阶加速度趋近律饱和控制的控制力计算公式。

## 5 仿真分析

为了验证加速度趋近律饱和控制的效果，采用一个 11 层的剪切型模型进行分析，并在模型的每一层均布置控制装置，各层质量为  $M = [7.864, 7.046, 7.046, 7.046, 7.046, 6.882, 6.882, 6.882, 6.882, 6.882, 5.076] \text{ kg} \times 10^5$ ，各层刚度为  $K = [9.645, 12.165, 12.165, 12.165, 12.165, 12.165, 9.765, 9.765, 9.765, 9.765, 9.765]$ 。

在仿真过程中取参数  $\alpha = 0.75$ ， $G = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) \times 10^2$ ，

$$\text{权矩阵 } Q = \begin{bmatrix} K & -M \times 10^7 \\ -M \times 10^7 & M \end{bmatrix}$$

地震波采用 El-Centro 南北向加速度记录，其峰值加速度调至 0.2 ( $\text{m/s}^2$ )。每个装置所提供的极限控制力均为  $u_{\max i} = 1.5 \times 10^6 (\text{N})$ ，其中  $i = 1, 2, \dots, r$ 。

图 1 和图 2 分别为结构顶层的相对位移和加速度的时程曲线，其中的实线表示有控时的曲线，虚线表示无控时的曲线。

由图中可以看出这种控制律能够有效的控制结构的地震响应，有效地削减相对位移和绝对加速度的峰值

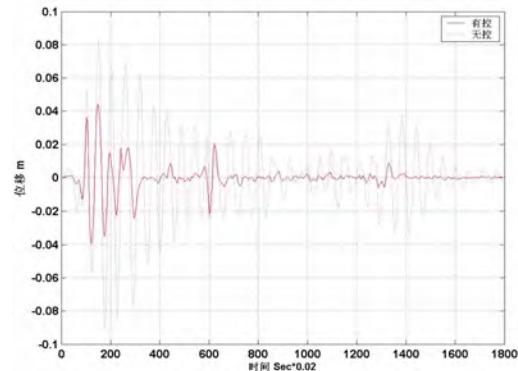


Figure 1. The displacement curve of top floor

图 1. 顶层位移时称曲线比较

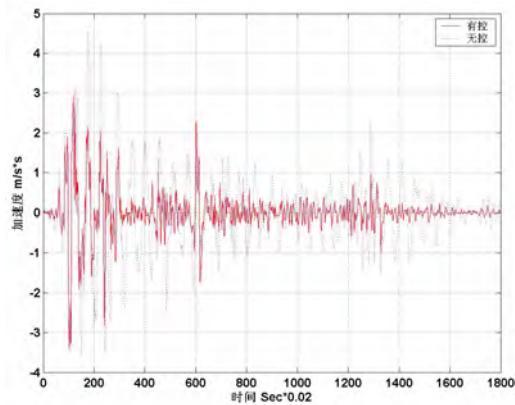


Figure 2. The acceleration curve of top floor

图 2. 顶层加速度时称曲线比较

并使它们趋近于稳定的平衡位置，取得较好的控制效果。定义如下的指标：

$$\eta = \frac{\text{abs}(a_{w\max}) - \text{abs}(a_{y\max})}{\text{abs}(a_{w\max})},$$

$$\rho = \frac{\text{abs}(x_{w\max}) - \text{abs}(x_{y\max})}{\text{abs}(x_{w\max})}$$

其中  $\eta, \rho$  分别为绝对加速度和相对位移的控制效果百分数； $a_{w\max}, a_{y\max}$  分别为无控和有控时结构的最大峰值加速度； $x_{w\max}, x_{y\max}$  分别为无控和有控时结构的最大峰值位移； $\text{abs}()$  表示对括号内的数据取绝对值。计算可得  $\eta = 23.75\%$ ,  $\rho = 50.73\%$ , 由此可以看出这种控制律是十分有效的，不仅能削减位移的峰值，而且同时对加速度也有一定削减效果。

## 6 结论

本文针对高层建筑结构给出了自由递阶加速度趋

近律饱和控制算法，并通过仿真计算验证了这种控制的有效性。仿真分析结果表明这种控制方法能够大大地削减结构地震响应相对位移的峰值，同时还能有效地削减绝对加速度的峰值并使相对位移和绝对加速度都趋向于稳定的平衡状态。仿真分析还表明这种控制方法对系统参数的摄动和外界干扰具有很强的抗摄动性，即该算法具有较好的鲁棒性，因而具有很好的应用前景。

## References (参考文献)

- [1] J.N.Yang, J.C.Wu, A.K.Agrawal and Z Li Sliding mode control of seismic-excited linear and nonlinear civil engineering structure [M].Technical Report NCEER-94-0017, Nat. Ctr. For Earthquake Engrg. Res, Buffalo, N.Y. 1994.
- [2] J.N.Yang et al. Experimental verifications of  $H_{\infty}$  and sliding mode control for seismic-excited structures [C]. Proc.1 World Conf. on Struct. Control, Int. Association. For Structural Control. Los Angeles, Calif, 1994: TP4-63-TP4-72.