

A Novel Approach to DOA Estimation under the Condition of Complex Noise

LIU Yanwu

School of Information and Electronic Engineering, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai, China
e-mail: superyanwu@163.com

Abstract: A new direction of arrival (DOA) estimation algorithm (or FLOM-PM algorithm) based on an improved propagator method (PM) in alpha stable noise environments is presented in this paper. Without finite second order moments in alpha stable noise, the least square (LS) propagator cannot be used. In this paper, the propagator is estimated by minimizing a new cost function, which is defined by introducing the fractional lower order moments (FLOMs), so as to carry out the DOA estimation. This algorithm can estimate the noise subspace by the partition of the receiving data matrix. It can reduce the error of estimation without computing the Eigen decomposition of the co-variation matrix or FLOM matrix, and implement the high resolution processing with very few snapshots. Simulation proves correctness of this algorithm.

Keywords: alpha stable distribution; estimation of DOA; propagator; simulation

一种复杂噪声背景下新的 DOA 估计方法

刘延武

山东工商学院信息与电子工程学院, 烟台, 中国, 264005
e-mail: superyanwu@163.com

【摘要】提出了一种新的适用于 α 稳定噪声环境的基于改进传播算子的空中目标方位 (或波达方向, DOA) 估计算法 (或称为 FLOM-PM 算法)。由于在 α 稳定分布噪声的环境下不存在有限的二阶矩, 因此采用最小二乘 (LS) 方法来求解传播算子的算法将不再适用。本文则在原传播算子算法 (PM) 的基础上, 通过引入分数低阶矩建立新的误差代价函数, 并通过对该代价函数的最小化, 来估计传播算子, 进而完成 DOA 估计。由于该算法可直接通过对阵列接收的数据向量进行分块来求解噪声子空间, 不需要估计和计算共变矩阵 (或分数低阶矩) 及其特征向量, 不但可减小估计的误差, 而且可实现对小快拍数据的高分辨处理。仿真实验验证了该算法的有效性和正确性。

【关键词】 α 稳定分布; 波达方向 (DOA) 估计; 传播算子; 仿真

1 引言

阵列信号处理在通信、雷达及电子对抗等领域有着广泛的应用, 其主要的研究方向是波束形成和空间谱估计 (或 DOA 估计) [1,2]。在进行空间谱估计时, 常采用高斯分布的模型来对噪声或干扰进行描述, 并利用基于二阶、高阶统计量等方法进行分析和处理, 这在许多情况下是可行的。然而, 在实际应用中, 所遇到的许多随机信号和噪声并不是高斯分布的, 例如大气雷电噪声、通信线路上的瞬间尖峰语音信号和以及多种人为噪声等, 这些信号中存在显著的尖峰, 用传统的基于二阶统计量的方法进行处理不能得到满意的结

果。有一种很重要的统计信号模型称为 α 稳定分布 (Alpha-stable distribution) [3-6], 可以用来描述上面提到的这类非高斯脉冲信号和噪声。 α 稳定分布没有统一闭式的概率密度函数, 其二阶统计量均不存在, 通常用特征函数对其进行描述。特征函数的表达式见参考文献[2]。其中: $\alpha \in (0, 2]$ 是特征指数, 其值愈小脉冲性愈强; $\beta \in [-1, 1]$ 是对称系数, $\beta=0$ 时表示对称分布, 记为 SaS (symmetry α -stable distribution); γ 是散度 (或分散系数), 类似于高斯分布的方差; a 为位置参数, 对应于均值或中值。当 $\alpha=2$ 时, α 稳定分布与高斯分布完全相同。因此, 认为高斯分布是 α 稳定分布的特例。根据 Levy 研究的广义中心极限定理 [3], α 稳定分布是惟一的一类构成独立同分布随机变量之和的极限分布,

它比高斯分布有更广泛的适用性。

因为 α 稳定分布没有有限的二阶矩, 因此基于二阶统计量的 DOA 估计方法不再适用。因此, 在 MUSIC 算法的基础上, Tsakalides 和 Nikias 提出了基于共变的 MUSIC (ROC-MUSIC) 方法^[5]; Liu 和 Mendel 提出了基于分数低阶矩的 MUSIC (FLOM-MUSIC) 方法^[6]。这两种方法都需要计算共变矩阵 (或分数低阶矩) 及其特种分解, 在小快拍数据时精度较差。本文则给出了一种适用于 α 稳定分布噪声环境且不需要特征分解的 DOA 估计新方法。

2 问题描述及信号模型

假设有 D 个相互独立的信号 $s_j(t)$ 入射到由 M 个阵元组成的一个阵列上, 加性噪声 $n_m(t)$ 为独立同分布 (i.i.d.) 的复 SaS 随机变量, $1 < \alpha \leq 2$ 。阵列第 m 个阵元上接收的信号 $r_m(t)$ 可表示为

$$r_m(t) = \sum_{j=1}^D a_m(\theta_j) s_j(t) + n_m(t) \quad (1)$$

式中 $a_m(\theta_j)$ 为信号 $s_j(t)$ 在波达方向 θ_j 上第 m 个阵元的增益, $j=1, \dots, D$; $m=1, \dots, M$ 。

(1)式写成矩阵形式为

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

式中

$$\mathbf{r}(t) = [r_1(t) \ r_2(t) \cdots r_M(t)]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \cdots \mathbf{a}(\theta_D)] \quad (4)$$

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \cdots s_D(t)]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \cdots n_M(t)]^T \quad (6)$$

若用 $\mathbf{a}(\theta_q)$ 表示来自发射源 q 的波阵面的 $M \times 1$ 维调整向量,

$$\mathbf{a}(\theta_q) = [a_1(\theta_q) \ a_2(\theta_q) \cdots a_M(\theta_q)]^T, q=1, \dots, D \quad (7)$$

则 N 个快拍数据矩阵为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{r}(1), \mathbf{r}(2), \dots, \mathbf{r}(N)] \quad (8)$$

根据共变的定义^[3]可得如下入射信号的共变矩阵:

$$\mathbf{\Gamma}_r = [\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t)]_\alpha = \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}_s\mathbf{A}^{<\alpha-1>} + \mathbf{\Gamma}_n \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{\Gamma}_s = \text{diag}(\gamma_{s_1}, \dots, \gamma_{s_p}), \gamma_{s_k} = [s_k, s_k]_\alpha$$

为信号 s_k 的散度; $\mathbf{\Gamma}_n = \gamma_n \mathbf{I}$,

$$[n_i(t), n_k(t)]_\alpha = \gamma_n \delta_{i,k}。$$

由于

$$[\mathbf{A}^{<\alpha-1>}]_{i,k} = [\mathbf{A}]_{k,i}^{<\alpha-1>} = [\mathbf{A}]_{k,i}^{\alpha-2} [\mathbf{A}]_{k,i}^* = [\mathbf{A}]_{k,i}^* \quad (10)$$

其中, $i, k = 1, 2, \dots, M$ 。

则可得

$$\mathbf{\Gamma}_r = \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{\Gamma}_n \quad (11)$$

对 $\mathbf{\Gamma}_r$ 进行特征分解, 可得特征值为 $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_M$, 其中 $(M-P)$ 个小特征值满足 $\rho_{P+1} = \dots = \rho_M = \gamma_n$; 特征向量为 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^M$ 。则 ROC-MUSIC 算法获得的谱为

$$S_{\text{ROC-MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\sum_{i=P+1}^M |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{v}_i|^2} \quad (12)$$

3 基于传播算子的 DOA 估计方法分析

本节对基于传播算子的 DOA 估计方法进行分析。

首先, 将方向矩阵 $\mathbf{A}$ 分块, 有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} D \times D \\ (M-D) \times D \end{matrix} \quad (13)$$

假设 $\mathbf{A}_1$ 为非奇异矩阵, 即 $\mathbf{A}_1$ 的 D 行相互独立, 那么 $\mathbf{A}_2$ 是 $\mathbf{A}_1$ 的线性变换, 有

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}^H \mathbf{A}_1 \quad (14)$$

称 $\mathbf{B}$ ($D \times (M-D)$ 维) 为传播算子^[7]。令

$$\mathbf{Q}^H = [\mathbf{B}^H, -\mathbf{I}_{M-D}] \quad (15)$$

显然

$$[\mathbf{B}^H, -\mathbf{I}_{M-D}]\mathbf{A} = \mathbf{Q}^H\mathbf{A} = \mathbf{0}_{(M-D) \times D} \quad (16)$$

由于 $\mathbf{B}$ 的求解需要源方位信息, 为了避免方位预估, 可以由数据向量求解传播算子。为此, 对数据向量进行分块有

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} D \times N \\ (M-D) \times N \end{matrix} \quad (17)$$

在无噪声的理想情况下, 有

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{B}^H \mathbf{X}_1 \quad (18)$$

只要估计出传播算子, 则可由下式进行 DOA 估计:

$$S_{PM}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (19)$$

在含有高斯噪声干扰时, 文献[7]通过求解 $\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{B}^H \mathbf{X}_1\|^2$ 的最小解来估计传播算子。但在含有 α 稳定噪声干扰时, 由于没有有限的二阶矩, 因此不能

采样这种方法。我们在下一节提出了一种新的方法。

4 FLOM-PM 算法

在 α 稳定噪声环境下, 在计算传播算子时, 为了避免由最小方差准则所引起的性能退化, 我们提出采用误差函数的 α 范数来定义系统的代价函数:

$$J_{\alpha} = \| \mathbf{X}_2 - \mathbf{B}^H \mathbf{X}_1 \|_{(\alpha)} \quad (20)$$

根据分数低阶矩理论^[3], 只要满足 $0 < p < \alpha$, $S_{\alpha S}$ 过程的 α 范数与其 p 阶矩成正比。因此, 系统的代价函数可写成如下分数低阶矩形式:

$$\hat{J}_{\alpha} = E[| \mathbf{X}_2 - \hat{\mathbf{B}}^H \mathbf{X}_1 |^p] \quad (21)$$

计算估计误差

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{X}_2(t) - \mathbf{Y}(t) \quad (22)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{B}(t)^H \mathbf{X}_1(t) \quad (23)$$

利用梯度技术, 并以误差信号的瞬时值代替其统计平均, 可得

$$\hat{\nabla}(t) = \frac{\partial \hat{J}_{\alpha}}{\partial \mathbf{B}(t)} = p[\mathbf{e}(t)]^{p-1} \text{sgn}(\mathbf{e}(t))[-\mathbf{X}_1(t)] \quad (24)$$

则得传播算子的自适应求解公式

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t+1) &= \mathbf{B}(t) + \mu \cdot \hat{\nabla}(t) \\ &= \mathbf{B}(t) + \mu \cdot p[\mathbf{e}(t)]^{p-1} \text{sgn}(\mathbf{e}(t))[-\mathbf{X}_1(t)] \end{aligned} \quad (25)$$

估计出 $\mathbf{B}$ 后代入 (15) 式中求得 $\mathbf{Q}$, 再代入 (19) 式中, 即可求得入射信号的空间谱。

称基于上述过程的空间谱估计方法为 FLOM-PM 算法。

5 仿真及分析

在下面的仿真实验中, 采用均匀线阵, 阵元间距为半波长。信号源处于远场, 噪声满足 α 稳定分布条件且 $\alpha=1.8$ 。因为 α 稳定分布噪声不存在有限的二阶矩(即方差不存在), 因此就不能采用一般的信噪比定义(信号与噪声功率比的分贝数)进行性能分析。广义信噪比 GSNR 定义见参考文献[1]。

实验1: 假设阵元数为4, 远场 20° 方向有一 QPSK (四相移键控) 信号入射到阵列上。采样快拍数取128, 广义信噪比 GSNR 为 10dB 时, 获得的信号空间谱见图 1。由图可知, ROC-MUSIC 算法与本文提出的 FLOM-PM 算法都能在信号入射的方向形成波束的主瓣, 且分辨率较高, 但 ROC-MUSIC 在大约 -40° 方向形成一个较大的伪峰, 而 FLOM-PM 算法具有较低的副

瓣。当 GSNR 从 5dB 变化到 20dB 时, 对应的信号入射角的估计偏差(200次独立实验)见图 2 所示。该图表明, FLOM-PM 算法的性能明显高于 ROC-MUSIC 算法的性能, 尤其在低 GSNR 情况下 ROC-MUSIC 算法的性能很不稳定, 而 FLOM-PM 算法却较稳健。

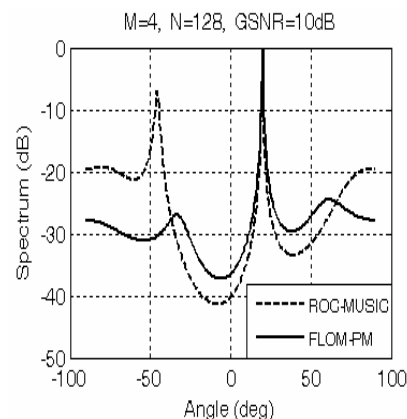


Figure 1. Space spectrum

图1. 空间谱

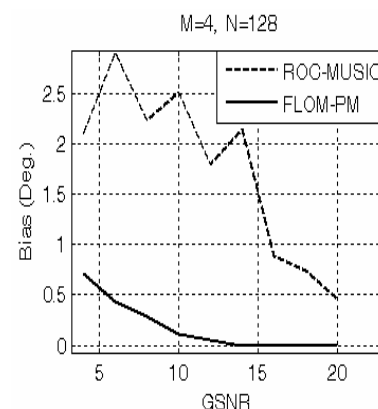


Figure 2. Angle estimation error with GSNR

图2. 角度估计偏差随 GSNR 变化

实验2 阵元数为4, 远场 20° 方向和 40° 方向各有一不相关的 QPSK 信号入射到阵列上。当快拍数取128, 广义信噪比 GSNR 为 15dB 时, 获得的信号空间谱见图 3。可见, 两种算法都能在两个信号入射的方向形成波束的主瓣, 且分辨率较高, 但 ROC-MUSIC 算法获得的空间谱依然出现较大的副瓣, 而 FLOM-PM 算法具有较低的副瓣。当快拍数 N 从 5 变化到 150 时, 对应的信号入射角的估计偏差(这里的“估计偏差”指两个角度估计偏差的平均值, 200次独立实验)见图 4 所示。由图可知, ROC-MUSIC 算法随着快拍数的增大, 估计的偏差总的趋势是在减小, 但出现较大幅度的振荡,

较不稳定；而FLOM-PM算法从第50次快拍开始就表现出很强的稳健性。该图表明，FLOM-PM算法的性能明显高于ROC-MUSIC算法的性能，尤其在小快拍数情况下ROC-MUSIC算法的性能较不稳定，而FLOM-PM算法却较稳健。

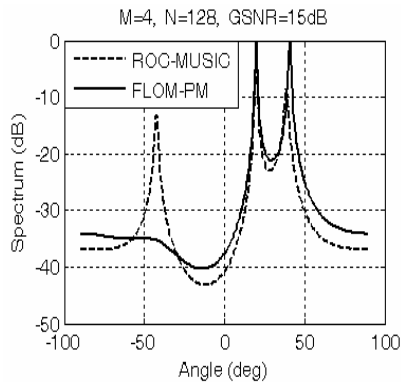


Figure 3. Space spectrum

图3. 空间谱

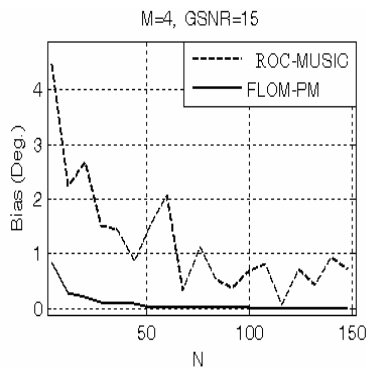


Figure 4. Angle estimation error with snapshots

图4. 角度估计偏差随快拍数变化

6 结论

本文提出了一种基于改进传播算子的 DOA 估计方法——FLOM-PM 方法。在 α 稳定分布噪声的环境下，通过引入分数低阶矩建立新的误差代价函数，并通过对该代价函数的最小化来估计传播算子，进而实现了对 DOA 的有效估计。通过仿真实验对比分析可知，本文提出的 FLOM-PM 算法在小快拍数据情况下，性能明显优于 ROC-MUSIC 算法。而且本文算法不需要进行特征值分解，减小了计算复杂性，易于工程实现。

7. Acknowledgements

This work is supported by the plan project of Shandong provincial education department (No.J08LJ69).

References (参考文献)

- [1] Cadzow J A, Kim Y S, Shiue D C. General direction-of-arrival estimation: a signal subspace approach [J]. IEEE Tans. on AES, 1989, 25(1): 31-46.
- [2] SHAO M, NIKIAS C L. Signal processing with fractional lower order moments: stable processes and their applications [J]. Proceedings of IEEE, 1993, 81(7): 986-1010.
- [3] Nikias CL, Shao M. Signal processing with alpha-stable distributions and applications [M]. New York: John Wiley & Sons Inc., 1995.
- [4] Ztsakalides P, Nikias CL. The robust co-variation-based MUSIC (ROC-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 1996, 44:149-159.
- [5] Liu T H, Mendel J M. A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2001, 49: 1605-1613.
- [6] The propagator method for source bearing estimation [J]. Signal Processing, 1995, 42: 121-138.