

# Study on Value at Risk of Investment Portfolio Based on Copula Theory

Jianhui YANG, Ruijun MO

School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou, China

Email: bmjhyang@scut.edu.cn

**Abstract:** In the risk evaluation of investment portfolio, it is a regular hypothesis that the unite distribution of the portfolio is normal distribution. This paper imposes the theory of Copula to compute the unite distribution on condition that only the marginal distributions are available in order to get a more accurate result and present a second way for the risk measuring. Finally, this paper calculate the value at risk under different proportion.

**Keywords:** investment Portfolio; Copula; VaR

## 基于 copula 的投资组合金融风险研究

杨建辉, 莫瑞君

华南理工大学工商管理学院, 广东广州, 510640

Email: bmjhyang@scut.edu.cn

**摘 要:** 传统的投资组合风险测量一般假设资产组合的联合分布服从多元正态分布。本文借助于 Copula 函数理论, 在只知道期货收益的边缘分布的前提下, 推算投资组合的联合分布情况, 可以更为准确地计算组合的 VaR 值, 为其风险度量提供了一种新思路。最后通过数值分析, 对不同权重下的投资组合计算其 VaR 值。

**关键词:** 投资组合; Copula; VaR

### 1 引言

风险测量是金融领域的中心问题, 现有文献针对投资组合 VaR 风险值的模型大都假设多个资产收益序列或风险因子的联合分布服从多元正态分布, 大量的实证表明, 这种假设经常与客观事实相违背, 计算得到的 VaR 与实际情况有较大的偏差。

Copula 理论是在构造多元联合分布以及随机变量间相关结构分析中常见的工具, 特别是在只知道随机变量边缘分布的情况下, 可以方便地应用 Copula 理论构造变量间联合分布函数。1998 年, Nelson 系统地介绍了 Copula 的定义、构建方法、Archimedean Copula 及相关性。而 Copula 应用于金融领域, 最早可引见 Embrechts, McNeil and Straumann(1999)关于金融风险管理的研究, 随后很多学者都对这一领域进行了更深入的研究。Forbes K(2002)通过对固定 Copula 模型来描述 Copula 的各种相关模式, 并把这一个方法广泛地应用在金融市场上的风险管理、投资组合选择及资产定价上。Clemente 和 Romano(2003)结合极值理论和

copula 理论研究了意大利的资本市场, 并运用 Monte Carlo 仿真方法计算了对多个资本进行投资组合得到 VaR 值。Dean Fantazzini(2003)引入条件 Copula 函数的概念, 同时将 Kendall 秩相关系数和传统的线性相关系数分别运用于混合 Copula 函数模型中对美国期货市场进行分析。

国内相关研究始于 2002 年, 张尧庭在概率论的角度上讨论了 Copula 方法在金融上的应用可行性。吴振翔(2004)用 Archimedean Copula 对欧元和日元的投资组合做了相应的风险分析, 得到了二者的最小风险投资组合, 并对不同置信水平下 VaR 和组合系数做了敏感性分析。周心莲(2007)借助 Copula 函数理论把资产收益的边缘分布及其相关结构分开来处理, 并结合 Monte Carlo 仿真方法, 对上证 180 指数和深圳成分股指数的不同比例下的投资组合计算其 VaR 值。张金清(2008)基于沪深两市经验数据的实证检验与分析表明, Frank-Copula 和 Clayton-Copula 分别适用于计算低置信度和高置信度下资产组合集成风险的 VaR。何其

祥(2009)利用沪深 300 指数的数据来研究股指期货和现货的相关结构,并使用了多种 Copula 函数结合不同的边际分布假设进行了模拟,说明了 Copula 方法在风险度量尤其是包含了股指期货的投资组合的风险度量上具有较高的精确性。

本文构建多组权重下的投资组合,借助 Copula 理论解决现实情况中多变量联合分布未知的难题,计算投资组合 VaR 值,作为投资风险衡量的参考。

## 2 预备理论

### 2.1 VaR 方法

根据 Jorion(2001)的概念: VaR(Value at Risk)是指在正常的市场环境下,在一定的置信水平和持有期内,衡量某个特定的头寸或组合所面临的最大可能损失。它基于金融资产价格变化的概率,依据过去的收益特征进行统计分析来估计价格的波动性和相关性,以此估计可能的最大损失。具体地说,就是指在一定的概率水平(置信度)下,某一金融资产或证券组合在未来特定的一段时间内的最大可能损失。

本文中计算基于 Copula 的联合分布的 VaR。它是指在给定的置信水平下,当投资组合满足某一投资结构比例(权重系数)时可能产生的最大损失,在这里将投资组合的成本看做是组合的损失。

用函数关系表述融资结构的价值,可以表示为:

$$VaR = f[C(F(x), F(y)), \beta] \quad (1)$$

其中  $C(F(x), F(y))$  为原油期货收益率与黄金期货收益率的 Copula 联合分布;  $\beta$  为原油期货收益率和黄金期货收益率的权重系数,是决策变量。

投资组合  $\beta x + (1 - \beta)y$  在显著性水平  $\alpha$  下的 VaR 值定义为:

$$P\{\beta x + (1 - \beta)y < VaR\} = 1 - \alpha \quad (2)$$

$$\text{即: } P\{\beta x + (1 - \beta)y > VaR\} = \alpha \quad (3)$$

### 2.2 Copula 相关理论

#### 2.2.1 Copula 的定义

Copula 理论的研究始于 1959 年, Sklar 通过定理形式将多元分布和 Copula 函数联系起来,通过 Copula 函数和边缘分布可以构造多元分布函数。

Sklar 定理: 设  $(X_1, \dots, X_n)$  为  $n$  个随机变量,其边缘分布为  $F_1, \dots, F_n$ ,  $H$  为  $(X_1, \dots, X_n)$  的联合分布函数,则一定存在 Copula 函数  $C$ , 使得:

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (4)$$

推论: 设  $F_1^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$  为各边缘分布函数的反函数, 则对于  $n$  维空间的  $(u_1, \dots, u_n)$ , 存在唯一 Copula 函数  $C([0,1] \times [0,1] \times \dots \times [0,1]) \rightarrow [0,1]$ , 使得:

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)) \quad (5)$$

根据这个推论, 如果我们可以得到这  $n$  个随机变量的边缘分布函数和任意的一个 Copula 函数, 我们就可以得到这  $n$  个随机变量的联合分布。Copula 函数因此就代表了多变量边缘分布和其联合分布之间的一种关系, 这种关系包含了变量间存在的所有信息, 所以应用 Copula 函数可以很方便的得到多元分布的相关结构。而且在知道一个随机向量的情况下, 完全可以应用某个 Copula 函数来表示, 这个分解过程并不会造成这些分量相关信息的损失。另外, 这里并不要求边缘分布函数  $F_1, \dots, F_n$  具有某种相同的形式。

根据 Sklar 定理和边缘密度函数, 可以得到多元 Copula 函数的密度函数  $c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n [C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))]}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (6)$$

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = f(x_1, \dots, x_n) / \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (7)$$

#### 2.2.2 Clayton Copula

常见的 Copula 函数主要有两大类, Elliptical Copula 和 Archimedean Copula, 而每一类又分为许多具体的 copula 函数。考虑到金融资产之间的下尾相关性, 本文选择 Archimedean Copula 中的 Clayton Copula 来刻画这种相关结构。二元 Clayton Copula 的分布函数和密度函数分别为:

$$C(u, v; \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \quad \theta \in (0, \infty) \quad (8)$$

$$c(u, v; \theta) = (1 + \theta)(uv)^{-\theta-1} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-2-\frac{1}{\theta}} \quad \theta \in (0, \infty) \quad (9)$$

#### 2.2.3 Kendall 秩相关系数

设  $(x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2)$  是独立同分布随机向量, 我们可以给出 Kendall 秩相关系数  $\tau(X, Y)$  的一般定义:

$$\tau(X, Y) = P[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0] - P[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0] \quad (10)$$

在已知  $(x_i, y_i), i=1, \dots, n$  为  $(X, Y)$  的样本,  $c$  为样本中

使得  $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$  的组合的数量,  $d$  为使得  $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$  的组合的数量, 则基于该样本的 Kendall 秩相关系数:

$$\hat{\tau}(X, Y) = \frac{c - d}{c + d} \quad (11)$$

可以证明,  $\tau(X, Y)$  的值对于严格递增的变换是不变的。

设  $(X, Y)$  相应的 Copula 函数是  $C(u, v)$ , Schettzer 和 Wolff 证明了  $\tau(X, Y)$  可由相应的 Copula 函数给出:

$$\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (12)$$

### 3 实证建模

本文选用 2004 年 4 月 19 日到 2009 年 3 月 12 日的纽约原油主力期货每日收盘价 (记为  $P_{x,t}$ ) 和黄金期货每日收盘价 (记为  $P_{y,t}$ ) 共 1273 组数据为样本。定义原油期货每日收益率为:  $x = 100[\ln(P_{x,t}) - \ln(P_{x,t-1})]$ , 黄金期货每日收益率为:  $y = 100[\ln(P_{y,t}) - \ln(P_{y,t-1})]$ , 共 1272 组数据。两组收益率走势图如下, 显然可见, 原油期货收益率的波动幅度较大, 特别是 2007 年下半年起至今, 意味其投资风险也比黄金期货高。

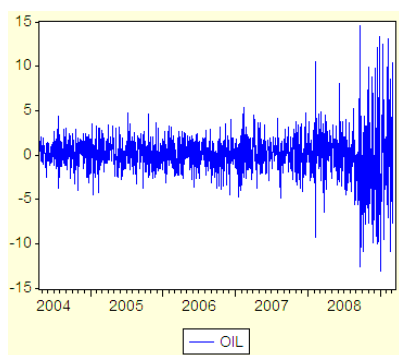


Figure 1. Daily profit rate of oil future  
图 1. 原油期货每日收益率

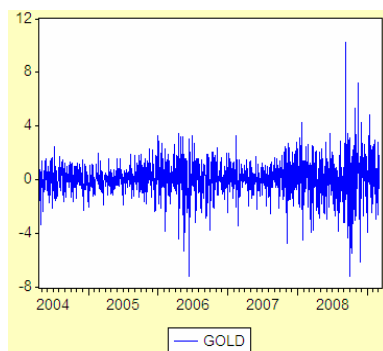


Figure 2. Daily profit rate of gold future  
图 2. 黄金期货每日收益率

### 3.1 确定边缘分布

计算易得  $X$ 、 $Y$  的样本均值为:

$$\mu_x = 0.042875, \quad \mu_y = 0.065839;$$

$X$ 、 $Y$  的样本方差为:

$$\sigma_x^2 = 6.437936, \quad \sigma_y^2 = 1.867988.$$

为了便于表述模型的计算过程, 假设  $X$  与  $Y$  的边缘分布为正态分布, 故边缘密度函数分别为:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 6.437936} e^{-\frac{(x-0.042875)^2}{12.875873}} \quad (13)$$

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 1.366744} e^{-\frac{(y-0.065839)^2}{1.867988}} \quad (14)$$

边缘分布函数分别为:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 6.437936} e^{-\frac{(x-0.042875)^2}{12.875873}} dx \quad (15)$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(y) dy = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 1.366744} e^{-\frac{(y-0.065839)^2}{1.867988}} dy \quad (16)$$

### 3.2 确定联合分布

利用样本数据求得  $\tau = -0.000787$ 。这说明原油期货和黄金期货的变化为负相关, 这有利于构造投资组合, 分散风险。计算易得  $X$ 、 $Y$  的样本

### 3.3 计算秩相关系数

根据 Kendall 秩相关系数与 Copula 中参数的关系式, 我们计算得出 Clayton Copula 的参数  $\theta = \frac{2\tau}{1-\tau} = -0.001572$ 。因此, 投资组合的联合分布的密度函数为:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y} \\ &= 0.998428 [F_1(x) F_2(y)]^{-0.998428} \times [f_1(x) f_2(y)] \times [F_1(x)^{0.001572} + F_2(y)^{0.001572} - 1]^{634} \end{aligned} \quad (17)$$

式(17) $f(x, y)$  是原油期货与黄金期货的联合分布密度函数, 描述了投资组合的实际收益率分布情况。 $f(x, y)$  的图像如图 3 所示:

### 3.4 VaR 的计算

在确定投资组合联合分布函数的形式后, 就可用它来描述组合的风险价值。本文选取显著性水平为 5%, 即计算置信度  $1 - \alpha = 1 - 5\% = 95\%$  时, 投资组合成本率的风险价值, 这里用投资组合的成本来表示。由第二节所述投资组合的成本率  $\beta x + (1 - \beta)y$  在显著

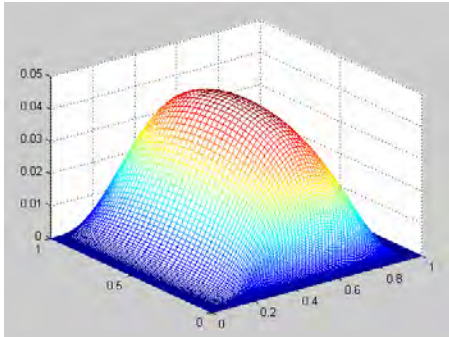


Figure 3. Unite distribution

图 3. 联合分布密度函数

性水平  $\alpha$  下的 VaR 值定义, 可知投资组合的成本率小于风险价值 VaR 的概率为 95%, 即投资组合成本率大于风险价值 VaR 的概率是 5%。显见, 这种控制风险是把成本率大于定值的概率控制在一个范围内 (本文是 5%) :

$$P\{\beta x + (1 - \beta)y > \text{VaR}\} = \alpha \quad (18)$$

将已计算出来的投资组合联合分布的密度函数式 (17) 代入到式 (18) 中, 得到:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 0.998428 \times [F_1(x)F_2(y)]^{-0.998428} \times \\ = 5\% \\ [f_1(x)f_2(y)] \times [F_1(x)^{0.001572} + F_2(y)^{0.001572} - 1]^{634} dx dy \quad (19)$$

式 (19) 中, 除 VaR 和  $\beta$  之外, 其他都是已知条件。因此给定一个  $\beta$  值, 就有一个 VaR 值与之对应, 该模型有解的。本文使用 Mathematics 进行求解。

作为示例, 令  $\beta$  以 0.1 的变化间隔, 此时  $\beta = 0.1, \dots, 0.9, 1$ 。分别求出对应的 VaR 值, 其结果见表 1。

Table 1. VaR under series of  $\beta$  ( $\alpha = 0.05$ )表 1. 不同组合的 VaR 值 ( $\alpha = 0.05$ )

| $\beta$ | VaR      |
|---------|----------|
| 0.1     | 1.609766 |
| 0.2     | 2.031699 |
| 0.3     | 2.069270 |
| 0.4     | 2.202187 |
| 0.5     | 2.423889 |
| 0.6     | 2.712128 |
| 0.7     | 3.047565 |
| 0.8     | 3.416063 |
| 0.9     | 3.807866 |
| 1       | 4.216377 |

可见, 随着  $\beta$  的增大, 也即增加投资组合中的原

油期货比例, 会使组合的整体风险上升。造成这样的原因是 2007 年下半年以来原油价格的剧烈波动, 而黄金变化幅度则相对较小了。作为理性的投资者, 应该适当衡量风险和收益的关系, 根据自身的风险承受能力, 选择合适的投资组合比例。

## 4 结论

正确的投资决策是建立在对收益率与风险的可靠预测之上的, 而可靠的预测只能通过基于现实假定的统计模型而得到。目前, 定量地分析期货市场交易的研究为数尚少, 本文投资组合分散风险的基本思想出发, 借助于 Copula 函数理论, 在只知道期货收益的边缘分布的前提下, 推算组合的联合分布情况, 对原油期货和黄金期货的不同比例下的投资组合计算其 VaR 值, 为其风险度量提供了一种新思路。

## References (参考文献)

- [1] Bodie Z, Rosansky. Risk and Return in Commodity Futures. Financial Analysts Journal. 1980, 5: 3-14.
- [2] Sehneeweis Thomas. Dealing with Mathys of Managed Futures . Alternative Investments. 1998.
- [3] Jensen G.R., Johnson R.R., Mercer. Efficient Use of Commodity Futures in Diversified Portfolios . Futures Markets. 2002, 5: 489-506.
- [4] Zheng Ming Chuan, Optimization Portfolio of Future Trade, Quantitative & Technica Economics, 1996, 7.  
郑明川, 期货交易优化组合策略研究, 数量经济技术经济研究, 1996, 7.
- [5] Lin Xiao Gui, The Theory and Method of Futures Combination Hedging Step by Step, Systems Engineering - Theory & Practice, 2002, 11.  
林孝贵, 期货市场逐步组合套期保值的理论与方法, 系统工程理论与实践, 2002, 11.
- [6] Chi Guo Tai, The Same Commodity of Futures Contract Portfolio Market Risk Evaluation Model Research and Application, Journal of Industrial Engineering/Engineering Management, 2006, 4.  
迟国泰, 同种商品不同月份期货组合风险评价模型研究及应用, 管理工程学报, 2006, 4.
- [7] Han De Zong, Study on Early Warning of Risk of Commodity Futures Market in China Based on Measurement of VaR, Journal of Industrial Engineering/Engineering Management, 2008, 1.  
韩德宗, 基于 VaR 的我国商品期货市场风险的预警研究, 管理工程学报, 2008, 1.
- [8] Nelson R B. An introduction to copulas: Lecture Notes in Statistics New York: Springer, 1998.
- [9] Embrechts, McNeil, Straumann. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls . Working paper. 1999.
- [10] orbes K, Rigobon R. No contagion, only interdependence: measuring stock market Co-movements . Journal of Finance. 2002, 57: 223-261.
- [11] Dean Fantazzini. Copulas Conditional Dependence Measures for Portfolio Management and Value at Risk . Working paper. 2003.
- [12] Wu Zhen Xiang, Risk Analysis of Foreign Exchange Markets by Copula, Chinese Journal of Management Science, 2004, 12(4).  
吴振翔, 基于 Copula 的外汇投资组合风险分析, 中国管理科学, 2004, 12(4).

- [13] Zhou Xin Lian, Research on VaR of portfolio Based on Copula theory, Wuhan: Wuhan University of Technology, 2007.  
周心莲, 基于 Copula 理论的投资组合 VaR 研究, 武汉: 武汉理工大学, 2007.
- [14] Zhang Jin Qing, Portfolio integrated risk measurement and its application-VaR method based on goodness-of-fit copula functions, Systems Engineering - Theory & Practice, 2008, 6.
- 张金清, 资产组合的集成风险度量及其应用——基于最优拟合 Copula 函数的 VaR 方法, 系统工程理论与实践, 2008, 6.
- [15] He Qi Xiang, Research of the Risk of the Portfolio Cluding Index Future—the Application of Copula Method to the Financial Risk Management, Application of Statistics and Management, 2009, 28(1).  
何其祥, 包含股指期货的投资组合之风险研究——copula 方法在金融风险管理中的应用, 数理统计与管理, 2009, 28(1)